दैनंदिन जीवनातील गणित

लोकोपयोगी विज्ञान

दैनंदिन जीवनातील गणित

र. म. भागवत

चित्रे
पवित्र घोष

नॅशनल बुक ट्रस्ट, इंडिया

ISBN 81-237-2267-2

पहिली आवृत्ती 1998 (*शके* 1919)
दुसरी आवृत्ती 2000 (*शके* 1922)
तिसरी आवृत्ती 2002 (*शके* 1924)

Everyday Mathematics *(Marathi)*

रु. 30.00

संचालक, नॅशनल बुक ट्रस्ट, इंडिया, ए-5 ग्रीन पार्क
नवी दिल्ली-110 016 यांनी प्रकाशित केले.

माझ्या पूज्य आई-वडिलांस सादर अर्पण.

अनुक्रमणिका

	ऋणनिर्देश	v
	प्रस्तावना	vii
1.	उपोद्घात	1
2.	संख्या	5
3.	चल राशी	35
4.	गुणोत्तरे : संख्यांची तुलना	45
5.	आकार आणि आकारमान	51
6.	त्रिकोणमिती	69
	संदर्भ	75

ऋणनिर्देश

हे पुस्तक लिहिताना, प्रा. वि. गो. कुळकर्णी, माजी संचालक होमी भाभा विज्ञानशिक्षण केंद्र, (HBCSE), टाटा मूलभूत संशोधन संस्था (TIFR), मुंबई यांनी मला सर्व कार्यालयीन सुविधा देऊ करून मोलाची मदत केली. याबद्दल माझी कृतज्ञता व्यक्त करताना मला अतिशय आनंद होत आहे. डॉ.हेमचंद्र प्रधान यांचा मी अत्यंत ऋणी आहे. हे पुस्तक लिहिण्यासाठी त्यांनी मला उद्युक्त केले. इतकेच नव्हे तर पुस्तक लिहीत असताना त्यांनी अतिशय बारकाईने हस्तलिखित वाचून ते सुधारण्यासाठी वेळोवेळी मोलाचे मार्गदर्शन केले. हे पुस्तक त्यांच्या मार्गदर्शनावाचून आणि प्रोत्साहनावाचून पूर्ण होऊ शकले नसते. त्यांच्या मार्गदर्शनाबद्दल मी त्यांचा अतिशय आभारी आहे. डॉ. सीमा पुरोहित, कीर्ति कॉलेज, मुंबई यांनी पुस्तकाचे हस्तलिखित काळजीपूर्वक वाचून अनेक सूचना केल्या त्याबद्दल मी त्यांना मन:पूर्वक धन्यवाद देतो.

श्री. अरुण मावळणकर यांनी या पुस्तकाची मुद्रणप्रत तयार करण्याची सर्व जबाबदारी घेऊन ती उत्तम रीतीने पार पाडली. श्रीमती वासंती पुरोहित यांनी हस्तलिखिताची टंकलिखित प्रत तयार केली. श्री. व्ही. एन्. गुरव यांनी ''वर्ड प्रोसेसर'' वर हस्तलिखिताची टंकलिखित प्रत तयार केली आणि श्री. शिवाजी नाडकर यांनी पुस्तकाच्या झेरॉक्स प्रती तयार केल्या. होमी भाभा विज्ञानशिक्षण केंद्रातील या सर्व कार्यालयीन सहकाऱ्यांचे मी मन:पूर्वक आभार मानतो. नीलेश, समीर, वृंदा आणि धनश्री या माझ्या कुटुंबीयांनी प्रथम पुस्तकातील काही चित्रे व आकृती परिश्रमपूर्वक काढून दिल्याबद्दल मी त्यांना धन्यवाद देतो. या आकृतींवरून एन.बी.टी. मध्ये पुन्हा चित्रे आणि आकृती तयार करण्यात आल्या.

श्रीमती मंजू गुप्ता, संपादक, नॅशनल बुक ट्रस्ट, इंडिया यांनी पुस्तकाचा सतत पाठपुरावा केला नसता तर हे पुस्तक वेळेवर तयार होणे शक्य झाले नसते. माझ्याकडून होणारा विलंब सहन करून त्यांनी मला सतत प्रोत्साहन दिले याबद्दल मी त्यांचा ऋणी आहे.

र. म. भागवत

प्रस्तावना

गणित ही मानवी व्यवहारातून आणि निसर्गाच्या निरीक्षणातून मानवाने केलेली निर्मिती आहे. गणित मानवी विचारपद्धतीच्या मुळाशी जाते आणि ते विचार नेमक्या शब्दात व्यक्त करते. गणित हे वास्तव सृष्टीचे संबोधांच्या सृष्टीत रूपांतर करते आणि वास्तव सृष्टीतील व्यवहारांचे नियमन करणाऱ्या संबोधांच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करते. दैनंदिन व्यवहारात लागणारे गणित म्हणजे या संबोधांचे सार आहे. म्हणूनच ते समजण्यास सोपे आहे. गणितातील कित्येक संबोध आपल्याला सहजबुद्धीने सुचत असले तरी ते नेमके व्यक्त करण्यासाठी योग्य त्या संज्ञा, चिन्हे आणि नियम तयार करण्याची आवश्यकता असते. म्हणजेच प्रथम आपल्याला गणिताची विशिष्ट भाषा आणि लिपी जाणून घ्यावी लागते. बहुधा यामुळेच गणिताचा जीवनाशी फारसा संबंध नाही अशी समजूत निर्माण होऊन गणितविषय कठिण वाटू लागतो. वास्तविक गणिताचा जीवनाशी घनिष्ठ संबंध आहे इतकेच नसून ते जीवनामधूनच उत्पन्न झालेले आहे. जीवनाच्या सर्वच क्षेत्रात आणि ज्ञानाच्याही इतर क्षेत्रात गणिताचा उपयोग आवश्यक असतो. तरीही अनेकांना गणिताचा तिटकारा वाटतो आणि ते त्याच्याकडे पाठ फिरवितात. आर्किमिडीज, न्यूटन, गॉस, लाग्रांज अशा महान शास्त्रज्ञांनी विज्ञानाबरोबर गणितातही महत्त्वाचे शोध लावले ही काही योगायोगाची गोष्ट नव्हे हे ध्यानात घेतले पाहिजे.

गणित ही मानवी ज्ञानाच्या अगदी सुरुवातीच्या शाखांपैकी एक असून ती मानवी संस्कृतीएवढीच प्राचीन आहे. मानवी जीवनाचा विस्तार होऊ लागला आणि त्याची जटिलता वाढू लागली त्याचबरोबर गणिताचा विस्तार होऊ लागला आणि त्याची जटिलताही वाढू लागली. संस्कृतीच्या विकासाच्या ओघात गुहेत राहणाऱ्या मानवाच्या साध्या जीवनापासून आधुनिक मानवाच्या विविधांगी आणि विलक्षण गुंतागुंतीच्या जीवनापाशी आपण आलो आहोत. याबरोबर गणिताचा सुद्धा विकास होऊन गणित ही आता एक अत्यंत विशाल आणि समृद्ध अशी ज्ञानशाखा बनली आहे. सामान्य नागरिकांना आपल्या व्यवहारांसाठी सुमारे हजार वर्षांपूर्वीचे गणित आजही पुरेसे असले तरी शास्त्रज्ञ, गणितज्ञ, तंत्रज्ञ, अर्थशास्त्रज्ञ आणि उच्च ज्ञानशाखेत काम करणाऱ्या इतर अनेक तज्ज्ञांना अत्याधुनिक आणि

अत्यंत विकसित अशा उच्च गणिताचा हरघडी उपयोग करावा लागतो. त्यामुळे गणित ही आता जीवनाच्या सर्व क्षेत्रात अपरिहार्य अशी गोष्ट होऊन बसली आहे. म्हणूनच सर्व क्षेत्रातील लोकांनी मानवी संस्कृतीच्या प्रगतीला गणिताचा कसा उपयोग झाला आहे याची माहिती घेणे व त्याचे महत्त्व जाणून घेणे आवश्यक आहे. या पुस्तकात दैनंदिन जीवनात लागणाऱ्या गणिताचे स्वरूप सोप्या भाषेत समजावून दिले असून त्यासाठी रोजच्या व्यवहारातील अनेक उदाहरणे दिली आहेत. गणिताच्या विकासाचा इतिहास सांगताना रोजच्या व्यवहारातूनच त्याचा उगम कसा झाला व ते त्यासाठी कसे उपयोगी पडते हे स्पष्ट केले आहे. सुमारे बाराव्या शतकापर्यंत झालेल्या गणिताच्या प्रगतीमधील अनेक महत्त्वाचे टप्पे भारतीय गणितज्ञांच्या शोधांवरच अवलंबून होते ही आपल्याला अभिमानास्पद अशी गोष्ट आहे. या पुस्तकात प्राचीन हिंदू गणितज्ञांनी केलेल्या कामगिरीचा विशेष उल्लेख केलेला आहे. गणित म्हणजे केवळ अमूर्त संबोध आणि नियम यांचा संग्रह नसून जीवनावश्यक व्यवहारांचा तो पायाच आहे हे नेहमी आढळणाऱ्या प्रश्नांच्या साह्याने स्पष्ट केले आहे. गणिताची आवश्यक ती सर्व अंगे सोप्या भाषेत कमीत कमी संज्ञा व सूत्रे वापरून समजावून दिली आहेत. विषय समजण्यासाठी पुस्तकात भरपूर चित्रे आणि आकृत्या योग्य ठिकाणी दिल्या आहेत. पुस्तक वाचनीय आणि मनोरंजक व्हावे यासाठी सर्व प्रकारे काळजी घेतली आहे.

''दैनंदिन जीवनातील गणित'' हे पुस्तक वाचकांना गणित विषयाचे आकलन व्हावे व त्यामध्ये रस उत्पन्न व्हावा यासाठी मदत करील आणि त्यांना अधिक अभ्यासाला उद्युक्त करील अशी आशा वाटते.

1

उपोद्घात

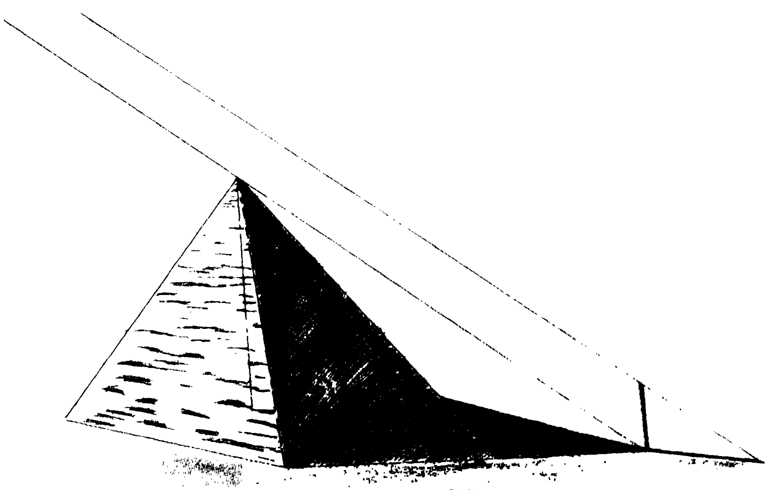
अगदी प्राचीन काळापासून गणित हा एक अतिशय उपयोगी विषय मानला गेला आहे. गणित हा शब्द संस्कृत भाषेतील गण् म्हणजे गणना करणे, मोजणे या शब्दापासून आलेला आहे. इंग्रजी भाषेत गणिताला *'मॅथेमॅटिक्स'* (Mathematics) म्हणतात. हा शब्द ग्रीक भाषेतील *'मॅथेमॅटा'* (Mathemata) म्हणजे *'शिकलेल्या गोष्टी'* या शब्दापासून आला आहे. सुप्रसिद्ध ब्रिटिश गणिती व तत्त्वज्ञ बर्ट्रांण्ड रसेल म्हणतात, ''गणित हा विषय असा आहे की त्यात आपण कशाविषयी बोलत आहोत हे आपल्याला ठाऊक नसते, तसेच आपण बोलतो ते सत्य आहे का, हे ही आपल्याला ठाऊक नसते. गणित प्रत्यक्ष वस्तूंविषयी आपल्याला काहीही सांगत नाही. फक्त एका गोष्टीपासून दुसरी गोष्ट विशिष्ट नियमांनी मिळू शकते एवढेच गणित सांगते. ज्ञानाच्या एका प्रमुख क्षेत्राबद्दल असे म्हणणे जरा विचित्र वाटते खरे परंतु प्राचीन ग्रीक लोकांचे गणित केवळ संख्या आणि आकृती यांच्यापुरते मर्यादित नसून त्यात संगीत आणि खगोलशास्त्राचाही समावेश होत असे. आता मात्र खगोलशास्त्र किंवा संगीत हे गणिताचे भाग मानले जात नाहीत. तरीही पूर्वी कधी नव्हता एवढा आता गणित विषयाचा विस्तार झाला आहे.

गणिताचा उगम प्राचीन काळी कसा आणि कधी झाला हे अज्ञात आहे. मात्र एवढे ज्ञात आहे की सुमारे 4000 वर्षांपूर्वी प्राचीन इजिप्त, आणि बॅबिलोनिया या देशांमध्ये कालगणनेसाठी गणिताचा उपयोग केला जात असे. त्यावरून त्यांना धान्य कधी पेरावे, नाईल नदीला पूर कधी येईल अशा महत्त्वाच्या घटनांचा काळ ठरविता येत असे. वर्गसमीकरणे सोडविण्यासाठीही ते गणित वापरत असत. हल्ली चुकीने पायथागोरसच्या नावावर सांगितला जाणारा सिद्धांतही त्यांना ठाऊक होता. त्यांची संस्कृती शेतीप्रधान असल्यामुळे जमिनीची मोजणी करणे, ग्रह, तारे यांचे मार्ग नक्की करणे त्यांना आवश्यक होते. त्यासाठी ते गणिताचा वापर करीत. व्यापार करण्यासाठी माल आणि पैसा यांची देवघेव करणे आणि हिशेब ठेवणे यासाठी अंकगणिताचा उपयोग केला जाई. जमिनीच्या हद्दी ठरविण्यासाठी तसेच पिरॅमिडसारख्या भव्य वास्तू बांधण्यासाठी भूमितीचा उपयोग केला जात असे.

गणिताची तत्त्वे किंवा सिद्धांत मांडणारा पहिला गणिती म्हणून मिलेटस (Miletus) येथील थेल्स (ख्रिस्तपूर्व सन 645-546) याचे नाव घेतले जाते. एखाद्या उंच वस्तूच्या सावलीची तुलना एखाद्या काठीच्या सावलीशी करून त्या वस्तूची उंची काढता येते हे त्याने दाखवून दिले. सूर्यग्रहण कधी होणार याचे भाकित त्याने आधीच वर्तविले होते असे म्हणतात. त्याचा शिष्य पायथागोरस याने ग्रीक भूमितीला शास्त्राचे स्वरूप देऊन तिची उभारणी केली आणि युक्लिड व आर्किमिडीज यांचा मार्ग सुकर केला.

बॅबिलोनियन लोकांकडून मिळालेल्या ज्ञानात ग्रीक लोकांनी बरीच भर घातली. त्याशिवाय त्यांनी गणिताला तर्कशास्त्रीय विचारपद्धतीचे स्वरूप दिले. यामध्ये प्रथम काही मूलभूत कल्पना सत्य आहेत असे मानले जाते. त्यांना प्रमेये म्हणतात आणि नंतर तर्कशास्त्राला अनुसरून हे निष्कर्ष काढता येतात असे दाखविले जाते. याला सिद्धता असे म्हणतात.

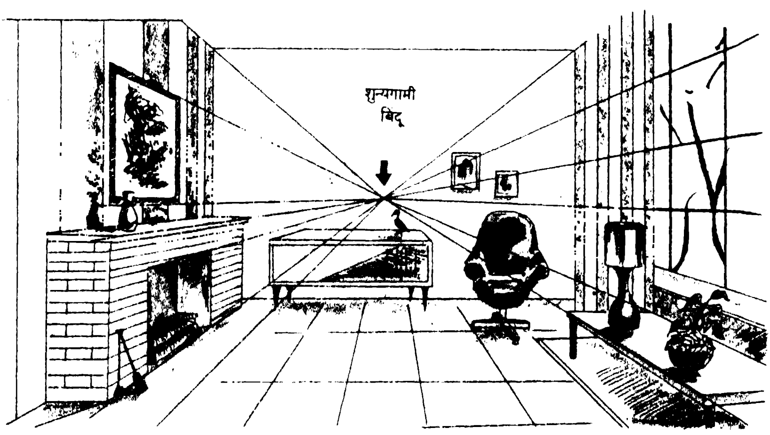
तसे आपण सर्वजण थोडे फार गणिती असतोच. आपल्या जीवनात आपण रोजच गणिताचा वापर करीत असतो. जेव्हा आपण घड्याळात वेळ पाहतो, जेव्हा आपण घेतलेल्या मालाची किंमत ठरवितो किंवा किती पैसे परत मिळतील याचा हिशेब करतो, किंवा जेव्हा क्रिकेट किंवा फुटबॉलच्या सामन्याच्या वेळी धावा किंवा गोल मोजतो तेव्हा आपण गणिताचाच उपयोग करीत असतो.



आकृती 1

व्यापारातील आणि उद्योगधंद्यातील हिशेबाची कामे गणितावर अवलंबून असतात. विमा उद्योग मुख्यत: व्याज आकारणीच्या गणितावर चालतो. जहाजाचा किंवा विमानाचा कप्तान आपला मार्ग ठरविताना भूमितीचा उपयोग करतो. जमीन मोजण्याचे भूमापनशास्त्र त्रिकोणमितीवर आधारलेले असते. चित्रकारालासुद्धा गणिताची मदत होते. त्रिमितीविश्वातील दृश्याचे यथातथ्य चित्र सपाट कागदावर काढताना त्याला दृक्भूमितीच्या (Perspective) तत्त्वांचा उपयोग करावा लागतो. संगीतामधील सप्तके, स्वरांचा संवाद आणि वादीसंवादी इत्यादी कल्पना गणितावरच आधारलेल्या आहेत. विज्ञानामध्ये तर गणिताला फारच महत्त्वाचे स्थान आहे. विज्ञानाच्या इतक्या विविध क्षेत्रात गणिताचा उपयोग केला जातो की एरिक टेंपल बेल या गणितज्ञाने ''गणित ही विज्ञानाची राणी आहे आणि दासीही आहे'' असे म्हटले आहे. विविध प्रकारची मापने आणि विविध गणित पद्धती भौतिकशास्त्राच्या कार्याला अत्यंत आवश्यक आहेत. रसायनशास्त्रज्ञ एखाद्या पदार्थाची आम्लता (Ph value) मोजण्यासाठी लॉगरिथमचा उपयोग करतात. सूर्य, चंद्र, ग्रह व तारे यांच्या गती मोजण्यासाठी खगोलशास्त्रज्ञ कोन आणि क्षेत्रफळांच्या मापनांचा उपयोग करतात. जीवशास्त्रात काही प्राण्यांच्या वाढीचा अभ्यास करण्यासाठी परिमाण विश्लेषण (Dimentional Analysis) या पद्धतीचा वापर करतात.

अत्यंत वेगवान गणकयंत्रांमुळे आकडेमोड करण्यासाठी आता पूर्वीच्या रीतींनी लागणाऱ्या वेळापेक्षा फारच कमी वेळ लागतो. त्यामुळे गणिताचा उपयोग कोणत्या



आकृती 2

विषयांमध्ये करावयाचा या विचारातही क्रांती घडून आली आहे. खगोलशास्त्रीय मापनात आणि कालमापनात अधिक अचूकपणा आल्यामुळे नौकानयनात सुधारणा झाली आणि ख्रिस्टोफर कोलंबस आणि नंतर आलेले दर्यावर्दी यांनी दूरदूरच्या सफरी करून नवे प्रदेश शोधून काढले व त्यांचे नकाशे बनविले. अधिक चांगली जहाजे, इंजिने, मोटारी आणि विमाने बनविण्यासाठी गणिताचा उपयोग होऊ लागला तसेच गणिताच्या उपयोगामुळे रडार यंत्रे आणि अग्निबाण तयार करून चंद्रावर आणि इतर ग्रहांवर अग्निबाण पाठविणे शक्य झाले. थोडक्यात वरील विवेचनावरून गणिताच्या विविध क्षेत्रातील उपयोगाची कल्पना येऊ शकेल.

●

2

संख्या

जिकडे तिकडे संख्याच संख्या

आपल्या जीवनात संख्यांना फार महत्त्व आहे. रोज घडणाऱ्या काही घटनांची उदाहरणेच पहा ना!

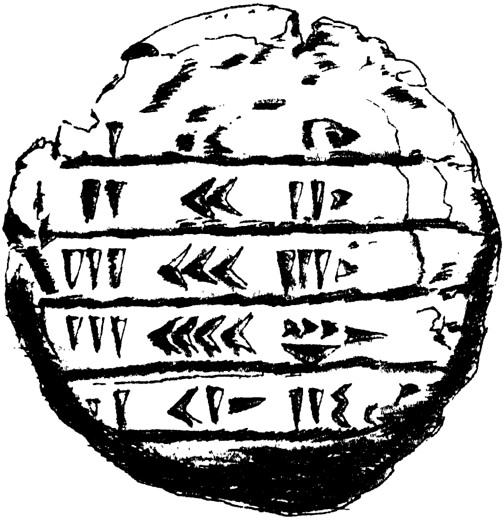
- ◇ भल्या पहाटे घड्याळाचा गजर वाजतो. ऑफिसला जाणारा माणूस खडबडून जागा होतो. ''सहा वाजले. उठले पाहिजे'' असे म्हणत उठून कामाला लागतो.
- ◇ बसमध्ये कण्डक्टर उतारूला म्हणतो, ''चाळीस पैसे आणखी द्या साहेब.'' उतारू – ''का ? मी बरोबर भाडे दिले आहे.''
  कण्डक्टर – ''साहेब भाड्यात पंचवीस टक्के वाढ झाली आहे आता!''
  उतारू – ''असे का ?''
- ◇ दूधकेंद्रावरील गृहिणी – ''मला दोन लिटरची पिशवी द्या.''
  ''दोन लिटरची पिशवी नाही.''
  ''मग एक लिटरची एक आणि अर्ध्या लिटरच्या दोन पिशव्या द्या.''
- ◇ उपहारगृहात बिल पाहून गिऱ्हाईक वेटरला म्हणते, ''वेटर, तुम्ही बिलाची बेरीज बरोबर केली नाहीत. बिल नऊ रुपये पन्नास पैसे नसून आठ रुपये पन्नास पैसे आहे.''
  वेटर – ''माफ करा साहेब.''

दररोजच्या जीवनात जेथे संख्या वापरल्या जातात अशी ही काही उदाहरणे आहेत. रोजच्या जीवनापेक्षा वेगळ्या असलेल्या इतर क्षेत्रातही संख्यांवर अनेक महत्त्वाच्या गोष्टी अवलंबून असतात. वेगवान धावपटूच्या वेळात 0.001 सेकंदाचा फरक पडला तरी तो शर्यतीचे सुवर्णपदक मिळवू शकतो किंवा गमावू शकतो. घड्याळाच्या चाकाचा व्यास अगदी हजारांश सेंटिमीटरने कमी किंवा जास्ती असला तरी ते निरुपयोगी ठरते. एखाद्या व्यक्तीचा टेलिफोन क्रमांक, रेशनकार्डाचा क्रमांक, बँकेतील खाते क्रमांक किंवा एखाद्याचा परीक्षा क्रमांक या केवळ साध्या संख्या नसून त्या त्या व्यक्तीची ओळख पटविणाऱ्या संख्या असतात.

या संख्या कधी निर्माण झाल्या, त्यांचा शोध कोणी लावला, संख्यांची सुरुवात कशी झाली, हे आणि असेच आणखी प्रश्न सहजच आपल्या मनात येतात. या प्रश्नांची उत्तरेही त्या प्रश्नांइतकीच उद्बोधक आणि मनोरंजक आहेत. आपण संख्यांबद्दल थोडीशी माहिती मिळवू या.

संख्यांचा उगम

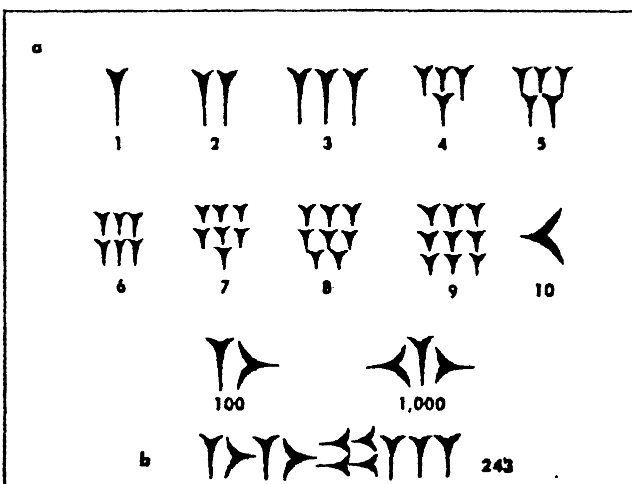
संख्या मानवी संस्कृती इतक्याच प्राचीन आहेत. ऑक्सफर्ड येथील ॲश्मोलिअन संग्रहालयामध्ये इजिप्तमधील प्राचीन काळातील एक राजदंड ठेवलेला आहे. एका लढाईत सापडलेल्या लुटीची माहिती त्याच्यावर लिहिली आहे. त्या लढाईत शत्रूचे 120,000 सैनिक कैद केल्याचे आणि लुटीमध्ये 400,000 बैल आणि 1,422,000 बकऱ्या मिळाल्याचे नमूद केले आहे. ही नोंद इ.स. पूर्व 3400 सालाच्याही पूर्वी झालेली आहे. त्यावरून इतक्या प्राचीन काळातही लोकांना इतक्या मोठ्या संख्या कशा लिहायच्या हे ठाऊक होते असे दिसून येते. अर्थातच इजिप्तमधील लोकांच्याही फार पूर्वीपासून संख्यांची सुरुवात झाली होती हे उघड आहे.



आकृती 3

आदिमानवाला वस्तूंची गणना करण्याची गरज पडत नसे. त्याचे घर म्हणजे एखादी गुहा असे. त्याचे अन्न वृक्षांपासून आणि इतर वनस्पतींपासून मिळे किंवा

तो अन्नासाठी शिकार करीत असे. परंतु सुमारे 10,000 वर्षांपूर्वी जेव्हा आदिमानव गुहेऐवजी लहान गावात वसती करू लागला, त्याने शेती करण्यास सुरुवात केली, आणि तो प्राणी पाळू लागला. तेव्हा पूर्वीपेक्षा त्याचे जीवन अधिक गुंतागुंतीचे बनले. लोकांना आता आपल्या दैनंदिन जीवनाचे, कौटुंबिक जीवनाचे आणि समाजजीवनाचे नियमन करण्याची गरज भासू लागली. गुरांची आणि शेतीच्या उत्पन्नाची मोजदाद करणे, जमिनीची मापणी करणे आणि काळाचे मापन करणे यासाठी संख्यांची आवश्यकता उत्पन्न झाली. आता जगामध्ये बॅबिलोनिया, इजिप्त, हिंदुस्थान, चीन अशा निरनिराळ्या भागांमध्ये मानवी संस्कृती नांदू लागल्या. या सर्व संस्कृतींनी जवळजवळ एकाच वेळी आपापल्या प्राथमिक स्वरूपाच्या संख्या विकसित केल्या. बॅबिलोनियामध्ये सापडलेल्या प्राचीन काळातील मातीच्या पुतळ्यांवर संख्या लिहिलेल्या आढळतात (आकृती 3). मातीच्या ओल्या विटांवर टोकदार काठ्यांनी ते पाचरीच्या आकाराची निरनिराळी चिन्हे वापरून संख्या लिहीत. एक या संख्येसाठी (Y) असे चिन्ह तर दहासाठी (<) आणि शंभरसाठी (Y>) अशी चिन्हे वापरली जात. निरनिराळ्या संख्या लिहिण्यासाठी ही चिन्हे पुन्हा पुन्हा वापरली जात. उदाहरणार्थ –



आकृती 4

1000 ही संख्या लिहिण्यासाठी ते (म्हणजे दहा शंभर) असे लिहीत किंवा शंभर ही संख्या दहा वेळा लिहीत. बॅबिलोनियन लोक खूप मोठ्या संख्या

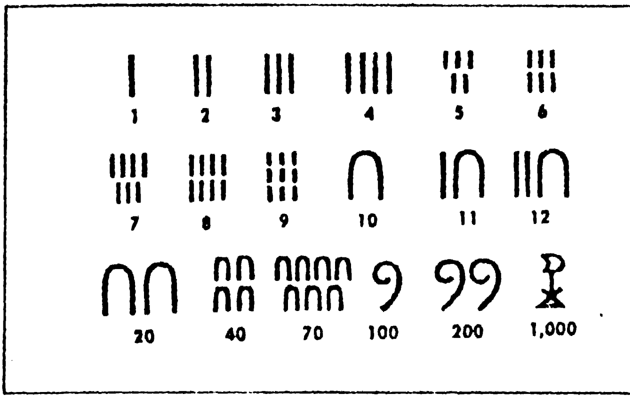


आकृती 5

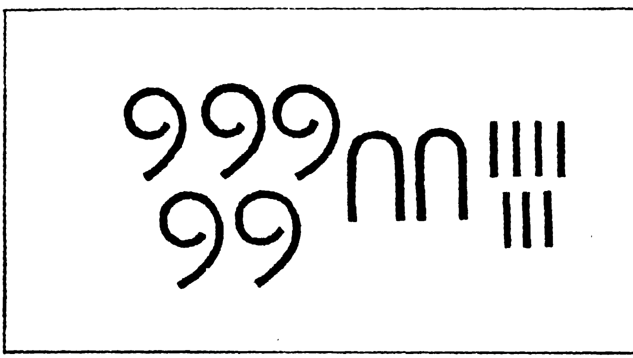
मोजू शकत. ते 1 ते 60 या संख्या मोजत आणि पुढे 60 च्या गटात संख्या मोजत असत. आपणही याच प्रकारे 10 च्या गटात संख्या मोजतो. इजिप्तमधील प्राचीन लोकही मोठ्या संख्या मोजू शकत. वर्षाचे 365 दिवस असतात हेही त्यांनी शोधले होते. इजिप्शियन लोकांनी संख्या लिहिण्यासाठी विशिष्ट चिन्हांची लिपी तयार केली होती. त्यांनी उभारलेल्या स्मारक स्तंभांवर या लिपीत लिहिलेल्या संख्या आढळतात (आकृती 5). खूप मोठ्या संख्या लिहिण्यासाठी मात्र ही लिपी जरा अडचणीची होती (आकृती 6). उदाहरणार्थ 527 ही संख्या या लिपीत कशी लिहिली जाते हे आकृती 6 b मध्ये दाखविले आहे.

सुरुवातीला हे लोक मोजण्यासाठी थोड्याशाच संख्या वापरत असत. काही लोक फक्त 5 किंवा 10 पर्यंत मोजू शकत, तर काहीजण 20 पर्यंत मोजत असत. आजसुद्धा खेड्यातील बरेच लोक फक्त 20 पर्यंत मोजू शकतात. काही आदिवासी लोक फक्त पहिल्या चार संख्याच वापरू शकतात. लहान मुलेही 10 पेक्षा मोठ्या संख्या वापरताना अडतात.

सुरुवातीला आपल्या कळपातील गाई किंवा शेळ्या, मेंढ्या मोजताना माणूस प्रत्येक प्राण्यासाठी एक दगड ठेवीत असे किंवा दोरीला एक गाठ मारत असे. (आकृती 7). त्या नंतर बहुधा तो आपल्या हाताची दहा बोटे वस्तू मोजण्यासाठी वापरू लागला असावा. दहापेक्षा मोठ्या संख्या तो कशा मोजत असेल याचा अंदाज

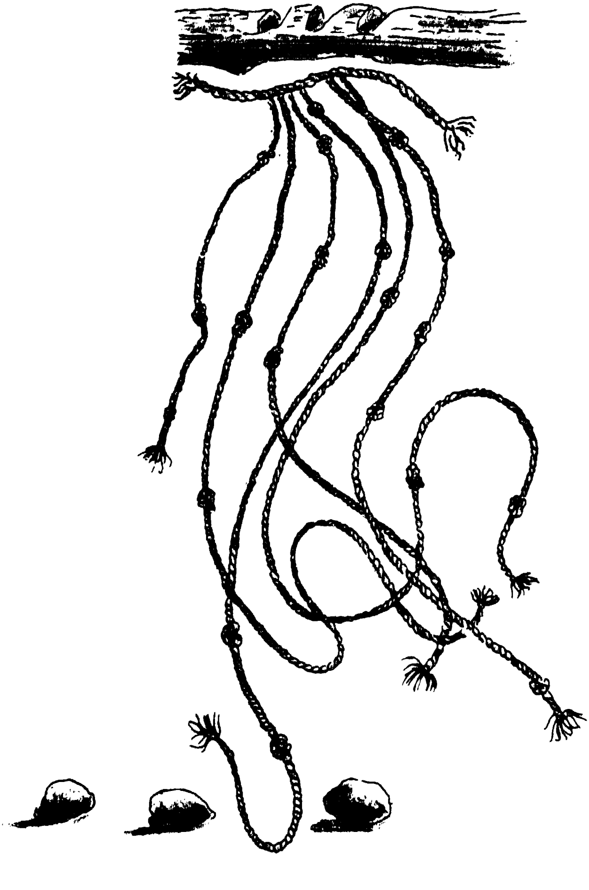


आकृती 6 a



आकृती 6 b

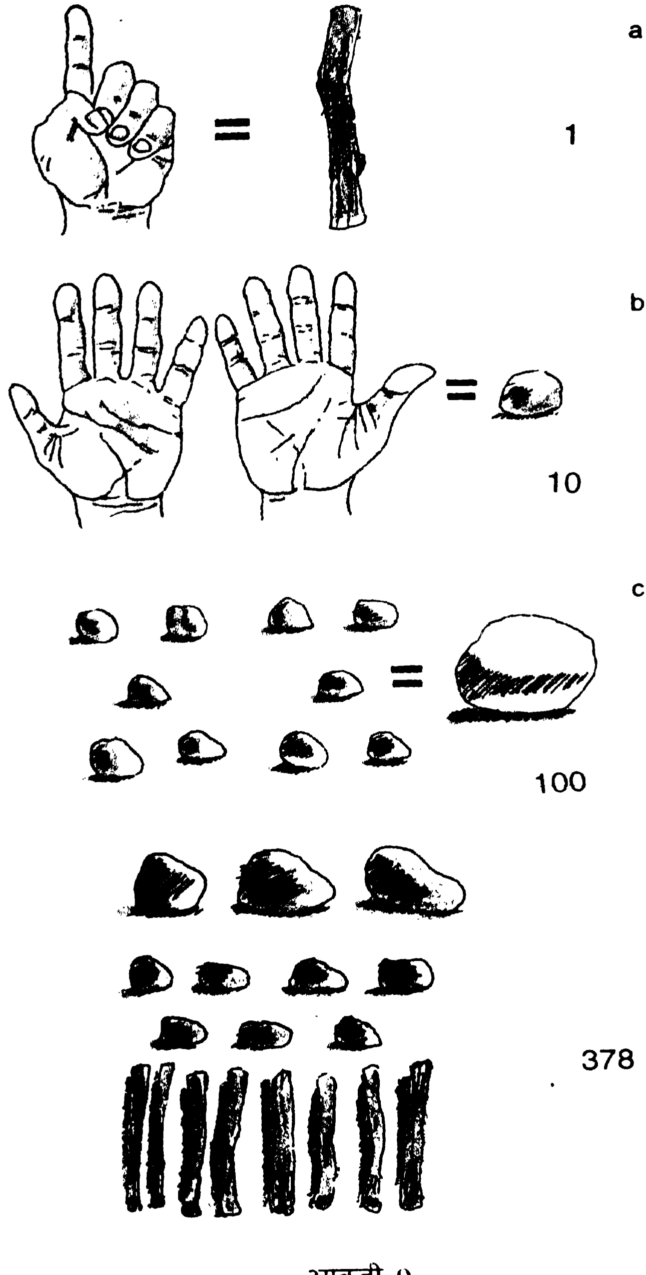
आपल्याला करता येईल. प्रथम बोटांनी 10 वस्तू मोजायच्या आणि 10 वस्तू झाल्या की एक दगड ठेवायचा; मग पुढच्या 10 वस्तू परत बोटांनी मोजायच्या आणि त्यांच्यासाठी दुसरा दगड ठेवायचा. असे करत दगडांची संख्या बोटांच्या संख्येएवढी (म्हणजे 10) झाली की त्या सर्व दगडांसाठी एक मोठा दगड ठेवायचा. हा दगड 10 वेळा 10 म्हणजे 100 ही संख्या दाखवायचा (आकृती 8). अशा क्रमाने मोठा दगड 100, लहान दगड 10 आणि बोटे किंवा काड्या दहा पेक्षा लहान संख्या दाखविण्यासाठी वापरून तेव्हाचा माणूस मोठ्या संख्या दाखवीत असावा. उदाहरणार्थ 3 मोठे दगड, 7 लहान दगड आणि 8 काड्या (8



आकृती 7

बोटांसाठी) अशा ठेवल्या की 3 शतक 7 दशक आणि 8 सुटे मिळून 378 ही संख्या दाखविली जाई (आकृती 9). अर्थात प्राथमिक अवस्थेतील सर्व मानवसंघ दहा बोटांचा वापर करत असत असे नाही. काहीजण बोटांचा वापर न करता फक्त दोन हातांचा वापर करीत असत, तर काहीजण हाताच्या बोटांशिवाय पायाच्या बोटांचाही संख्या मोजण्यासाठी वापर करीत असत.

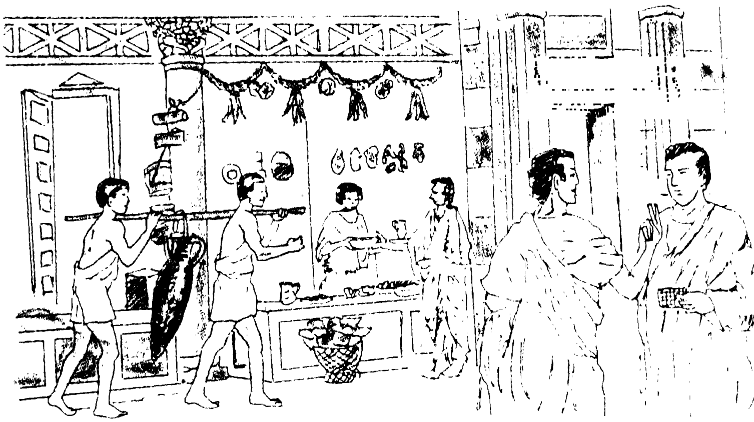
संख्या मोजण्यासाठी दगड, गोट्या किंवा काड्या वापरणे अडचणीचे ठरत असल्यामुळे लिहिता येऊ लागताच लोकांनी संख्या लिहिण्यासाठी निरनिराळी चिन्हे वापरण्यास सुरुवात केली.



आकृती ९

संख्या लेखन :

हिंदुस्थान, चीन आणि इतर देशातील प्राचीन संस्कृतींनी संख्या लिहिण्याच्या आपापल्या पद्धती विकसित केल्या होत्या. हिंदू आणि इजिप्शियन लोक संख्या मोजण्यासाठी 10 हा पाया धरत. ते प्रथम 1 ते 10 या संख्या घेत आणि नंतर 10 च्या गटांनी मोठ्या संख्या मोजत. दक्षिण अमेरिकेतील माया संस्कृतीचे लोक 10 ऐवजी 20 हा पाया धरत, तर प्राचीन सिरीयामधील लोक संख्या मोजण्यासाठी 2 हा पाया धरत असत.



आकृती 10

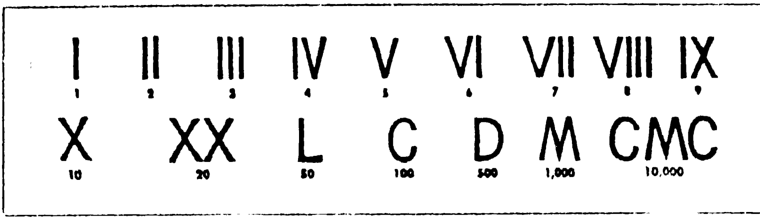
ग्रीक आणि रोमन लोक संख्या लिहिण्यासाठी त्यांच्या बाराखडीतील अक्षरे वापरत असत (आकृती 10). त्यांच्या अधिक प्रचलित असलेल्या पद्धतीमध्ये बाराखडीतील सर्व अक्षरांखेरीज आणखी तीन वेगळी चिन्हे वापरत असत. प्रत्येक

A	B	Γ	Δ	E	F*	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50
Ξ	O	Π	Ϙ*	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω	Ϡ*	
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

आकृती 11

अक्षराला ठराविक किंमत दिलेली असे. जसे पहिली नऊ अक्षरे 1 ते 9 या

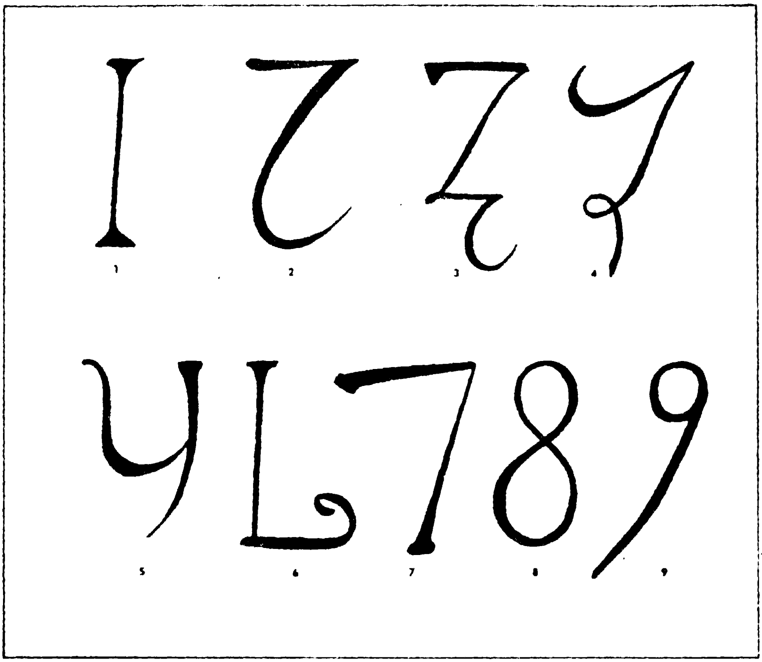
संख्यांसाठी, पुढची नऊ अक्षरे 10 ते 90 साठी इ. शून्य या संख्येसाठी ग्रीक पद्धतीत कोणतेही चिन्ह नव्हते (आकृती 11). रोमन पद्धतीमधील I (एक), V (पाच), C (शंभर), M (हजार) ही अक्षरे सर्वांना ठाऊक असतात आणि अजूनही ही अक्षरे संख्या दाखविण्यासाठी वापरली जातात (आकृती 12). परंतु या अवघड पद्धतीमुळे रोमन लोकांना मोठ्या संख्या लिहिणे आणि त्यांची आकडेमोड करणे शक्य होत नसे.



आकृती 12

संख्या लिहिण्याची अतिशय सुलभ आणि निर्दोष अशी पद्धत हिंदू लोकांनी निर्माण केली. ही पद्धत सर्व जगामध्ये सर्वमान्य झाली आणि अजूनही हीच पद्धत सर्वत्र वापरली जाते. इ.स. पूर्व 100 ते इ.स. 200 या काळामध्ये हिंदू लोकांनी 1 ते 10 या संख्यांची चिन्हे तयार केली. ही चिन्हे नंतर अरब लोकांनी घेतली. अरबांनी 18 व्या शतकामध्ये स्पेन देशाचा बराचसा प्रदेश जिंकून घेतला. त्या ठिकाणी त्यांनी हळूहळू हिंदू-अरेबिक अंक वापरण्यास सुरुवात केली (आकृती 13). ही अंकपद्धती हळूहळू युरोपखंडातील इतर लोकांनीही उचलली. साधारणपणे 15 व्या शतकापर्यंत हिंदू-अरेबिक अंकांच्या चिन्हांमध्ये बदल होत होत त्यांना सध्याच्या 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 या अंकांचे स्वरूप प्राप्त झाले. सुरुवातीला 20,30,40 इ. अंकांसाठी स्वतंत्र चिन्हे होती. परंतु पुढील काळात दोन अत्यंत क्रांतिकारक संकल्पनांनी गणिताचे स्वरूप पूर्णपणे पालटून टाकले. यापैकी 10, 100 (10 चे 10 गट), 1000 (100 चे 10 गट), इ. दहाच्या पटींचे गट वापरणे ही पहिली संकल्पना आणि संख्या लिहिताना प्रत्येक गटाला वेगळे स्थान देणे ही दुसरी संकल्पना. 1 ते 9 हे अंक त्या त्या स्थानी प्रत्येक गट किती वेळा आला हे दाखविण्यासाठी वापरावयाचे. या पद्धतीमुळे 20,30 इ. संख्यांकरिता वेगळी चिन्हे वापरण्याची गरज राहिली नाही. या पद्धतीला ''स्थानिक किंमत'' पद्धती (Place Value notation) असे म्हणतात. ह्याहीपेक्षा महत्त्वाची संकल्पना म्हणजे संख्या लिहिताना एखाद्या स्थानावर कोणतीही संख्या नाही हे दाखविण्यासाठी 0 ही संख्या लिहिणे ही होय ! 0 या चिन्हाचा अर्थ ''शून्य'' असा आहे. म्हणजेच ते

स्थान रिकामे आहे हे त्या चिन्हाने दाखविले जाते. 1 ते ९ या सत्या संख्यांना



आकृती 13

गटाला सहस्र इ. नावे दिली जातात. एखाद्या संख्येत दहाचे दोन गट असतील आणि एकही एकक नसेल तर एककाच्या स्थानी 0 आणि दशकाच्या स्थानी 2, म्हणजेच 20 असे लिहिले जाते. तसेच 307 याचा अर्थ दिलेल्या संख्येत 7 एकक, 0 दशक आणि 3 शतक आहेत असा होतो. या पद्धतीने संख्या लिहिताना एककाचे स्थान सर्वात उजवीकडे, त्याच्या डावीकडे दशक, त्याच्या डावीकडे शतक या क्रमाने स्थाने दाखविली जातात. म्हणजेच संख्येचे अंक खाली दाखविल्याप्रमाणे त्या त्या स्थानी लिहिले जातात.

सहस्र	शतक	दशक	एकक
1000	100	10	1

संख्येचे अंक त्या संख्येत किती एकक, दशक, शतक इ. आहेत हे दाखवितात. एखादे स्थान रिकामे आहे हे तेथे 0 लिहून दाखवितात. जसे, 85406 ही संख्या खाली दाखविल्याप्रमाणे लिहिली जाईल.

10,000	1,000	100	10	1
8	5	4	0	6

म्हणजेच 85406 या संख्येचा अर्थ (8 × 10,000) + (5 × 1000) + (4 × 100) + (0 × 10) + (1 × 6) असा होतो. म्हणजेच 8 या अंकाची किंमत 80000, 5 ची किंमत 5000 असा होतो. याच प्रमाणे इतर अंकांच्या किंमती त्यांच्या स्थानाप्रमाणे ठरविल्या जातात.

हिंदूंची ही संख्या लिहिण्याची पद्धत इतकी क्रांतिकारक होती की जगातील सर्व लोकांनी इतर सर्व पद्धतींचा त्याग करून हीच पद्धत स्वीकारली. या पद्धतीने संख्यालेखनावरील इतर सर्व बंधने दूर केली. आता कोणालाही आपल्या इच्छेला येईल इतकी मोठी संख्या लिहिता येऊ लागली. आता आकडेमोड करण्यासाठी ''अबकस'' सारखी साधने वापरण्याऐवजी कागद आणि लेखणी वापरणे शक्य झाले. आधुनिक घात चिन्हांचा उपयोग करून 1,10,100 इ. संख्या 10 च्या घातरूपाने लिहिता येतात. म्हणून ही पद्धती 10 च्या पायावर आधारलेली आहे असे म्हणतात. तिला ''दशमान'' पद्धती असे नाव देण्यात आले आहे. या रीतीने स्थानिक किंमती 10^7 10^6 10^5 10^4 10^3 10^2 10^1 10^0 अशा लिहिल्या जातात. या पद्धतीने संख्या कितीही स्थानांपर्यंत वाढविता येते. हिंदू लोकांनी आपल्या संख्या निदान 18 स्थानांपर्यंत लिहिलेल्या आहेत.

1,000,000,000,000,000,00 (म्हणजे 10^{17}) या संख्येला त्यांनी ''परार्ध'' हे नाव दिले होते. आधुनिक इंग्रजी संख्यांची नावे वापरल्यास या संख्येला ''हंड्रेड थाऊजंड मिलियन मिलियन'' (Hundred Thousand Millon Millon) असे म्हणावे लागेल (मिलियन = 10 लक्ष).

10 खेरीज इतर पाया

दशमान पद्धतीची मुख्य शक्ती तिच्या सामान्यीकरणाच्या क्षमतेमध्ये आहे. अंकांची स्थानिक किंमत आणि 0 ही संख्या वापरून आपण कोणतीही संख्या, 10 खेरीज इतर कोणतीही संख्या पाया म्हणून धरून लिहू शकतो, उदाहरणार्थ पाया 5 धरून संख्या लिहू. आता स्थानिक किंमती म्हणजे 5 चे घात होतील. त्या पुढील प्रमाणे लिहिता येतील.

$$5^6 \ 5^5 \ 5^4 \ 5^3 \ 5^2 \ 5^1 \ 5^0$$

या पद्धतीचे अंक 1,2,3,4,0 हे असतील. 1 ते 4 हे एकक आहेत. 5 चा गट दुसऱ्या (म्हणजे 5 च्या) स्थानी, 5 चे 5 गट 5^2 च्या स्थानी याप्रमाणे लिहिले

जाईल. या पद्धतीने 4,203 ही संख्या लिहावयाची असेल तर 5^3 च्या स्थानी 4, 5^2 च्या स्थानी 2, 5^1 च्या स्थानी 0 आणि एकक स्थानी 3, म्हणजेच

5^3	5^2	5^1	5^0
4	2	0	3

अशी संख्या लिहिली जाईल. दशमान पद्धतीत ही संख्या 4(125) + (2 × 25) + (0 × 5) + (3 × 1) = 553 अशी लिहिली जाईल. जर 2 ही संख्या पाया म्हणून धरली तर 1 आणि 0 हे दोनच अंक त्या पद्धतीमध्ये असतील. स्थानिक किंमती म्हणजे 2 चे घात असतील. त्या किंमती अशा असतील.

$$...2^9\ 2^8\ 2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$$

वर दिलेली 553 ही संख्या या पद्धतीत अशी लिहिली जाते.

2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1

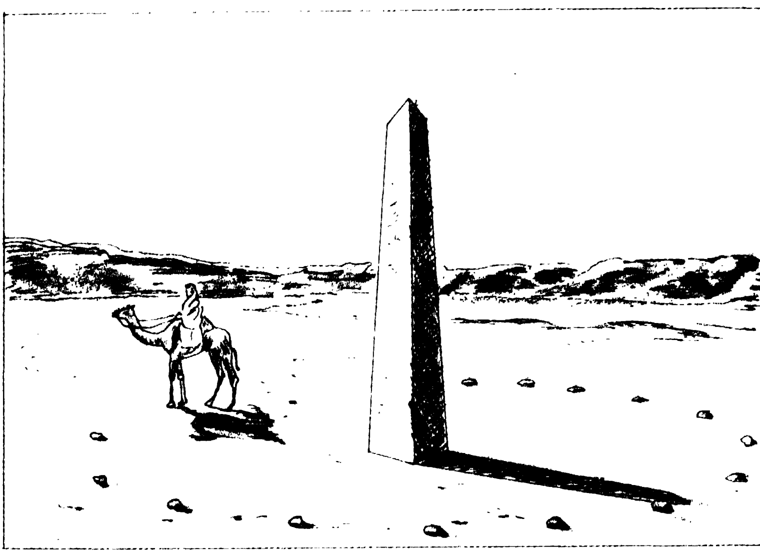
दशमान पद्धतीत ही संख्या (1 × 512) + (0 × 256) + (0 × 128) + (0 × 64) + (1 × 32) + (0 × 16) + (1 × 8) + (0 × 4) + (0 × 2) + 1 अशी होते. या वरून ही पद्धती सामान्यीकरणास सुलभ आहे हे लक्षात येते. 2 पायाविषयी पुढे अधिक विचार करू.

शून्याचा शोध ही गणिताच्या इतिहासातील सर्वात महत्त्वाची घटना मानली जाते. थोड्या विनोदाने असे म्हटले जाते की हिंदू लोकांनी गणिताला दिलेली देणगी शून्य आहे. गणिताच्या एका अमेरिकन इतिहासकाराने असे म्हटले आहे, ''गणिताच्या संपूर्ण इतिहासात हिंदू लोकांनी लावलेल्या शून्याच्या शोधाएवढी क्रांतिकारक घटना दुसरी कोणतीही नाही.'' लाप्लास हा जगातील अत्यंत श्रेष्ठ फ्रेंच गणिती होऊन गेला. त्याने असे म्हटले आहे, ''संख्या लिहिण्यासाठी दहा अंकांची चिन्हे वापरणे आणि प्रत्येक अंकाला त्याची विशिष्ट स्थानिक किंमत देणे ही अत्यंत कल्पक पद्धती हिंदुस्थानानेच जगाला दिली आहे. ही संकल्पना सखोल विचाराची आणि अत्यंत महत्त्वाची असली तरी ती इतकी सोपी वाटते की तिच्या खऱ्या गुणांकडे आपले लक्ष जात नाही. प्राचीन काळातील अत्यंत महान् गणिती आर्किमिडीज आणि अपोलोनिअस यांनाही ही संकल्पना सुचली नाही यावरून हिंदूंच्या या कार्याची थोरवी आपल्या लक्षात येईल.''

संख्यांवरील क्रिया

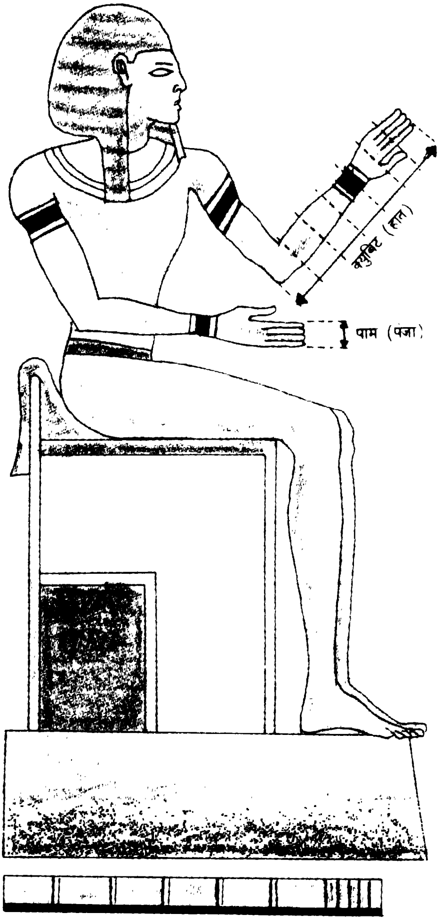
गणित केवळ दैनंदिन जीवनात उपयोगी आहे एवढेच नसून त्याचा उगमच दैनंदिन जीवनामधून झाला आहे. गणित ही मानवाची निर्मिती असून मुख्यत:

आपल्या वैयक्तिक आणि समाजातील व्यवहारांचे नियमन करण्याकरिता त्याने गणिताचा वापर करण्यास सुरुवात केली. प्राथमिक अवस्थेतील मानवाचे जीवनही अनेक घडामोडींनी भरलेले होते. त्याला आपल्या कळपातील गुरांची किंवा वस्तीतील लोकांची मोजदाद करावी लागे. घरे बांधण्यासाठी तसेच शेती करताना जमिनीची मोजणी करावी लागे. धार्मिक कार्यासाठी, यज्ञवेदी बांधताना त्याला विविध आकार मोजावे लागत. तसेच शेतीतून आलेले पीक मोजण्यासाठी



आकृती 14

आकारमानाचे मापन करावे लागे. कित्येक पदार्थांचे वजनही तो मोजत असे. सर्वात महत्त्वाचे म्हणजे त्याला वेळेचे मापन करावे लागे. वेळ मोजण्यासाठी मानवाने मापनपद्धती शोधून काढल्या होत्या. इजिप्शियन लोकांनी उभारलेले स्तंभ (Obelisk) म्हणजे त्याच्या सावलीवरून वेळ सांगण्याचे साधन होते. त्याला ''सावलीचे घड्याळ'' म्हणत. सूर्यामुळे स्तंभाची सावली पडे. सूर्योदयाच्या वेळी पडलेली सावली आणि सूर्यास्ताच्या वेळी पडलेली सावली यामधील अंतराचे भाग पाडून तासांच्या खुणा करीत (आकृती 14). एका पद्धतीच्या एखाद्या मापनाचे दुसऱ्या पद्धतीच्या मापनात रूपांतर करण्गसाठी इजिप्शियन लोकांनी प्रमाणित कोष्टकेही तयार केली होती. क्युबिट हे अंतराचे माप प्राचीन इजिप्तमध्ये वापरत असत. इजिप्शियन धर्मगुरू 1 क्युबिट (भारतीय मापाप्रमाणे 1 हात) माप



आकृती 15

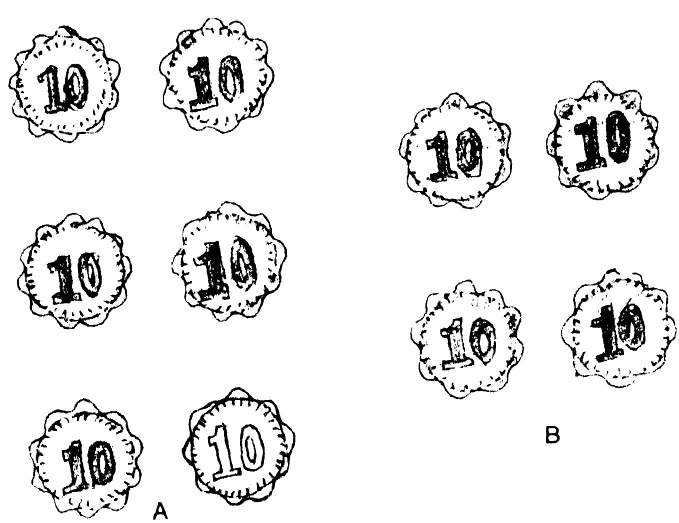
दाखविणारी धातूची पट्टी वापरत असत. तिच्यावर ''पाम'' (Palm) आणि ''डिजिट'' (Digit – 1 बोट) हे त्याचे लहान भागही दाखविलेले असत (आकृती 15). या सर्व व्यवहारांसाठी संख्या तर आवश्यक होत्याच पण संख्यांवरील क्रियाही करणे आवश्यक होते.

संख्या आणि त्यांच्यावरील क्रिया यांच्या मुळाशी एक साधे पण महत्त्वाचे तत्त्व आहे. दोन संचांमधील घटकांच्या एकास-एक जोड्या लावता येतात हे ते तत्त्व होय. हाताच्या दहा बोटांचा संच हा एकास-एक जोड्या लावण्यासाठी सहज उपलब्ध होणारा संच आहे. एका वस्तूबरोबर एक बोट, दुसऱ्या वस्तूबरोबर दुसरे बोट अशा जोड्या लावून एक बोट म्हणजे एक वस्तू, दोन बोटे म्हणजे दोन वस्तू या प्रकारे दहा वस्तू मोजल्या जात. यातूनच 1 ते 10 या संख्यांचा उगम झाला. दोन संचांमधील वस्तूंच्या जोड्या लावून संचांची तुलना करता येते. जोड्या लावताना एका संचामधील वस्तू संपल्या आणि दुसऱ्यामधील वस्तू उरल्या तर दुसरा संच मोठा आहे असे म्हणता येते. जर जोड्या लागून दोन्ही संचातील वस्तू संपल्या तर दोन्ही संच समान आहेत असे म्हणता येते. वस्तूंच्या एकास एक जोड्या लावून संचांची तुलना करणे ही संकल्पना अगदी नैसर्गिक रीत्या आपल्या मनात येते. या संकल्पनेला आता ''एकास-एक संगती'' चे तत्त्व असे नाव दिले जाते. या तत्त्वाच्या आधाराने

गणिताचा विकास केला जातो. खरे म्हणजे एकास-एक संगतीमुळे एक वस्तू आणि एक संख्या यांची ''एकमेव जोडी'' आपण तयार करू शकतो.

यातूनच एका संख्येच्या साह्याने एखाद्या विशिष्ट वस्तूचा निर्देश आपण करू शकतो. उदाहरणार्थ, एक पोस्ट ऑफिस आणि त्याचा पिन कोड क्रमांक यांची सूची तयार केली की पत्रावर पोस्ट ऑफिसच्या नावाऐवजी फक्त पिनकोड क्रमांक लिहिला तरी पत्र नेमके तेथे पोहोचते. परीक्षेच्या प्रत्येक उमेदवाराला त्याचा विशिष्ट परीक्षा क्रमांक दिलेला असतो. परीक्षेच्या निकालपत्रकात नावांऐवजी फक्त क्रमांकांची यादी प्रसिद्ध केली तरी चालते. त्याचप्रमाणे टेलिफोन क्रमांक किंवा रेशनकार्डाचा क्रमांक हे विशिष्ट व्यक्तीची ओळख पटविण्यासाठी वापरले जातात. आधुनिक संगणकाचे कार्य त्याचा ''प्रोग्रॅम'' मधील क्रमांक आणि त्याच्याशी जोडलेले कार्य यांच्या संगतीमुळेच घडून येते. संख्यांच्या विकासाच्या सुरुवातीला एखाद्या संचातील वस्तू मोजण्यासाठी गोट्यांचा किंवा काड्यांचा संच तुलनेसाठी वापरला जात असे. अशा संचांमधील वस्तूंच्या जोड्या लावण्यातूनच ''बेरीज'' या क्रियेचा उगम झाला.

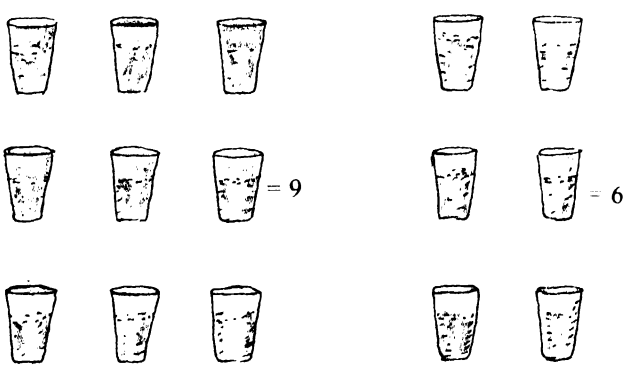
3 नाण्यांचा एक आणि 2 नाण्यांचा एक असे दोन संच घ्या (आकृती 16). 3 नाणी असलेला A हा संच 2 नाण्यांच्या B संचापेक्षा मोठा आहे. कारण एकास-एक जोड्या लावल्या तर A संचामध्ये एक नाणे जोडी न लागता उरते.



आकृती 16

म्हणजेच 3 ही संख्या 2 पेक्षा मोठी आहे. आता B संचामध्ये आणखी एक नाणे घातले (आकृती मधील पांढरे नाणे) तर दोन्ही संचांच्या जोड्या बरोबर होऊन ते समान होतील म्हणजेच 2 + 1 = 3. ही बेरजेची क्रिया म्हणजेच संख्यांवरील क्रियांची सुरुवात होय. दोन संख्यांची बेरीज केली तर तिसरी संख्या मिळते. ती पहिल्या दोन्ही संख्यांपेक्षा मोठी असते. संचांमधील वस्तू कोणत्याही असल्या तरी 2 + 1 ही बेरीज केली की नेहमी 3 हीच संख्या मिळते. यावरून 2 आणि 1 या संख्यांच्या जोडीबरोबर बेरीज या क्रियेने 3 ही एकमेव संख्या जोडली जाते हे दिसून येते. अशा प्रकारे बेरजेच्या क्रियेने कोणत्याही दोन संख्यांच्या जोडीची तिसऱ्या एकमेव संख्येशी एकास-एक संगती करता येते. वरील उदाहरणात 2 + 1 आणि 3 यांची एकास एक संगती जोडली आहे. अशा रीतीने बेरजेच्या क्रियेने संख्यांच्या संचाचा विस्तार करूनच 1,2,3,4,.... या संख्यांचा संच मिळविलेला आहे. यातील शेवटची तीन टिंबे हा संच पुढे न संपता वाढविता येतो असे दर्शवितात. या संचातील कोणत्याही दोन संख्यांची बेरीज केली तर त्याच संचातील दुसरी एकमेव संख्या मिळते.

आता वरील उदाहरणातील संच A आणि संच B यांचा पुन्हा विचार करा. जर A संचातील एक नाणे काढून घेतले तर A आणि B या संचांच्या जोड्या बरोबर लागतात (आकृती 16 b). संचातील 3 नाण्यांमधील 1 नाणे काढून घेणे म्हणजे 3 - 1 = 2 अशी वजाबाकी करणे होय. ही क्रिया बेरजेच्या नेमकी विरुद्ध आहे. बेरीज आणि वजाबाकी या मानवाने केलेल्या पहिल्या क्रिया होत. त्यानंतर क्रमाक्रमाने त्याने गुणाकार आणि भागाकार या अधिक अवघड क्रिया शोधून काढल्या. मुळात या दोन्ही क्रिया अनुक्रमे बेरीज आणि वजाबाकी या क्रियांवरच



आकृती 17

आधारलेल्या आहेत. आधुनिक संगणकात तर बेरीज आणि वजाबाकी या क्रियांना अधिकच महत्त्व आले आहे.

अनेक वस्तूंचा विचार करताना त्यांचे गट करणे ही कल्पना आपल्याला सहज सुचते. बऱ्याचदा पुष्कळ वस्तू मोजताना आपण दोन दोन, तीन तीन किंवा पाच पाच वस्तूंचे गट करून त्या मोजतो. तीन वस्तूंचे दोन गट घेतले की 6 ही संख्या मिळते, तीन गट घेतले की 9 ही संख्या मिळते (आकृती 17).

या जाणिवेतून गुणाकाराची कल्पना उत्पन्न होते. उलट गटांनी वजाबाकी करण्याच्या कल्पनेतून भागाकाराची क्रिया सुचते. पूर्वी गुणाकार करण्यासाठी बेरजेची क्रिया कशी वापरत असत हे पाहणे मनोरंजक आहे. उदाहरणार्थ प्राचीन इजिप्शियन लोक 12×12 हा गुणाकार करण्यासाठी बेरजेचा उपयोग कसा करत ते पाहू.

पुढील कोष्टक पहा :

1	12
2	24
4	48
8	96

वरील कोष्टकातील प्रत्येक संख्या तिच्यावरील संख्येची दुप्पट करून मिळविली आहे. आता $4 \times 12 = 48$ व $8 \times 12 = 96$ हे मिळाल्यावर $48 + 96$ ही बेरीज 12×12 इतकी असेल हे समजते. म्हणून $12 \times 12 = 144$ असे उत्तर येते. विशेष म्हणजे $4 \times 12 + 8 \times 12 = (4 + 8) \times 12$ ही गोष्ट त्या इजिप्शियन लोकांना समजलेली होती. या तत्त्वालाच आता ''गुणाकाराचा वितरण गुणधर्म'' असे म्हणतात.

एखाद्या संख्येची पुन्हा पुन्हा वजाबाकी करून भागाकार करता येतो. $12 \div 3$ हा भागाकार पहा. 12 मधून 3 ची 4 वेळा वजाबाकी करता येते. म्हणून $12 \div 3 = 4$. आता $19 \div 8$ हा भागाकार पहा. 19 मधून 8 ही संख्या फक्त 2 वेळा वजा करता येते आणि 3 बाकी उरते. आता $3 \div 8$ हा भागाकार करावयाचा उरतो. म्हणून $\frac{19}{8}$ हा भागाकार.

$\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}$ म्हणजेच $\frac{19}{8} = 2 + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$ म्हणजेच $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

असा लिहिला जात असे.

भागाकार म्हणजे एका वस्तूचे सारखे लहान भाग करणे असे म्हणता येते. उदाहरणार्थ कागदाचा एक चौरस ही एक वस्तू मानली तर तिचे चार सारखे भाग करता येतात. ही क्रिया $1 \div 4$ अशी आहे असे म्हणता येईल. प्रत्येक भाग $\frac{1}{4}$ ने दर्शविला जातो. यावरूनच अपूर्णांकाची संकल्पना निर्माण होते. आता आपण दोन प्रकारच्या संख्या वापरू शकतो, एक नैसर्गिक संख्या व दोन अपूर्णांक. जेव्हा शून्याचा शोध लागला तेव्हा या संख्यांमध्ये शून्याचाही समावेश करण्यात आला. नैसर्गिक संख्या, शून्य आणि अपूर्णांक या संख्या आणि या संख्यांवरील बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार या चार क्रिया एवढे गणित आपल्या दैनंदिन जीवनातील व्यवहारांसाठी पुरेसे होते.

4 मध्ये 3 मिळविले की 7 ही संख्या मिळते. आता मूळ 4 ही संख्या मिळविण्यासाठी 7 मधून 3 वजा करावे लागतात. म्हणजेच वजाबाकीच्या क्रियेने बेरजेच्या क्रियेचा परिणाम नष्ट होतो. म्हणून वजाबाकी ही बेरजेची विरुद्ध क्रिया आहे असे म्हणतात. तसेच बेरीज ही वजाबाकीची विरुद्ध क्रिया आहे. गुणाकार आणि भागाकार या सुद्धा परस्परांच्या विरुद्ध क्रिया आहेत.

गुणाकार म्हणजे एकाच संख्येची पुन्हा पुन्हा बेरीज होय. त्याच प्रमाणे संख्येचा पुन्हा पुन्हा गुणाकार केला की तिचा वर्ग, घन किंवा अधिक मोठा घात मिळतो. एखाद्या जागेचे क्षेत्रफळ काढताना संख्येचा वर्ग करावा लागतो. सर्व बाजू समान असलेल्या चौकोनी ठोकळ्याचे घनफळ काढताना संख्येचा घन करावा लागतो. याच्या उलट वर्ग करण्याची विरुद्ध क्रिया म्हणजे वर्गमूळ काढणे आणि घन करण्याची विरुद्ध क्रिया म्हणजे घनमूळ काढणे या क्रियासुद्धा नेहमी कराव्या लागतात.

खरे म्हणजे रोजच्या मानवी जीवनात शेकडो प्रकारचे व्यवहार केले जातात. त्यातून उत्पन्न होणाऱ्या निरनिराळ्या समस्या सोडविण्यासाठी केवळ पाच सहा क्रिया कशा पुरेशा होतात ? काही उदाहरणे घेऊन या प्रश्नाचा विचार करू. पुढील प्रश्न पहा.

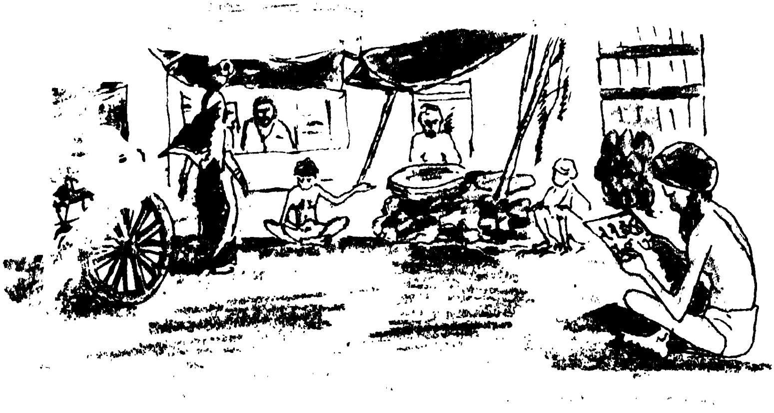
◇ एका पुस्तक विक्रेत्याने 4 रु. स एक अशा दराने एका पुस्तकाच्या 100 प्रती विकत घेतल्या. तर त्यांची एकूण किंमत किती ?

◇ प्रत्येकी 100 चौ. मी. क्षेत्रफळ असलेल्या चार खोल्यांचे एकूण क्षेत्रफळ किती ?

◇ 4 मीटरचे सेंटिमीटर किती ?

◇ प्रत्येक विद्यार्थ्याकडून 4 रु. शुल्क घेतले. तर 100 विद्यार्थ्यांचे एकूण शुल्क किती ?

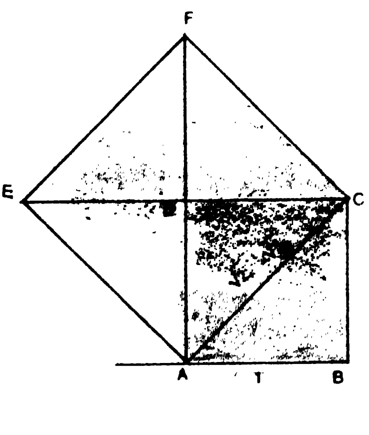
या चार निरनिराळ्या प्रश्नांचे उत्तर मात्र 100 x 4 हेच आहे. या वरून असे लक्षात येते की व्यवहारात वरील चार प्रश्न भिन्न दिसत असले तरी गणिताच्या एकाच नमुन्यात बसणारे आहेत. याचाच अर्थ असा की गणितातील क्रिया म्हणजे निरनिराळ्या दैनंदिन व्यवहारांची प्रातिनिधिक रूपे आहेत किंवा गणिताच्या आधुनिक भाषेत ''प्रतिकृती'' (Models) आहेत. संख्या आणि त्यांच्या वरील क्रिया यांच्या द्वारे आपल्या दैनंदिन व्यवहारांमागील मूलभूत विचार प्रक्रिया व्यक्त केल्या जातात. संख्या स्वत: वस्तू किंवा व्यवहारांपासून अगदी स्वतंत्र असतात. मात्र त्यांची वस्तूंशी किंवा व्यवहारांशी सांगड घातली की त्यांना विशिष्ट अर्थ प्राप्त होतो आणि त्यांच्यापासून आपल्याला वस्तू किंवा व्यवहारांविषयी माहिती मिळू शकते. उदाहरणार्थ 50 ही संख्या घ्या. केवळ या संख्येला कोणताही अर्थ नाही. पण रमेशला गणितात 100 पैकी 50 गुण मिळाले किंवा जयपूरचे कमाल तापमान आज 50° से. होते असे म्हटले की तीच संख्या आपल्याला वेगवेगळी माहिती देऊ शकते.



आकृती 18

संख्याप्रणालीचा विकास

इ. स. 500 च्या सुमारास हिंदुस्थान हे अंकगणित, बीजगणित आणि त्रिकोणमिती या विषयांच्या अभ्यासाचे प्रमुख केंद्र बनले होते (आकृती 18). या काळापर्यंत संख्याप्रणालीचा बराच विस्तार झाला होता. पूर्णांक अणि अपूर्णांक अशा दोन्ही प्रकारच्या संख्यांवरील क्रियांचे नियम निश्चित होऊन रूढ झाले होते. 1 ते 9 आणि 0 ही अंकांची चिन्हे आणि गणिताच्या भाषेतील विविध संज्ञाही निश्चित झाल्या होत्या. परंतु गणितातील नियम हे वेगवेगळ्या आकडेमोडीसाठी लागणारे नियम म्हणून दिले जात असत. ते व्यापक सर्वसामान्य नियमांच्या स्वरूपात दिले जात नसत. मात्र हे नियम केवळ विशिष्ट आकडेमोडीसाठी नसून त्यांचे खरे स्वरूप व्यापक आहे ह्याची गणिती लोकांना जाणीव होती असे दिसते. या काळात पूर्णांक आणि अपूर्णांक संख्यांशिवाय ऋण संख्या आणि अपरिमेय संख्या यांचाही ते वापर करू लागले होते. हिशेबातील कर्ज दाखविण्यासाठी ऋण संख्यांची संकल्पना निर्माण झाली आणि कर्जाचा निर्देश ऋण संख्येने केला जाऊ लागला. मात्र अलीकडे केला जातो तसा ऋणसंख्यांचा सर्रास वापर तेव्हा केला जात नव्हता. हल्ली 0° सेल्सियसपेक्षा कमी तापमान दाखविण्यासाठी ऋण संख्या वापरतात. सरासरी पेक्षा पाऊस कमी पडला तर त्याची तूट ऋण संख्येने दाखवितात. खेळातही गोल्फ खेळणाऱ्या खेळाडूने निर्धारित फटक्यांपेक्षा कमी फटक्यात फेरी पुरी केली तर त्याचे गुण ऋण संख्येने दाखवितात.

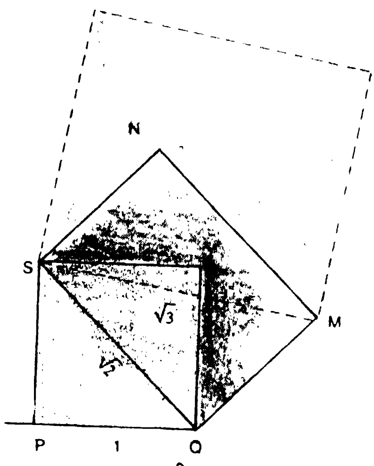


आकृती 19

ऐतिहासिक दृष्टीने पाहिले तर प्राचीन गणितज्ञांना $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ अशा अपरिमेय संख्यांची माहिती ऋणसंख्यांच्या बरीच आधीपासून होती. या संख्या काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू मोजताना किंवा एका चौरसाच्या कर्णावर दिलेल्या क्षेत्रफळाचा चौरस काढण्यासाठी किंवा एका वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाइतके क्षेत्रफळ असलेला चौरस काढण्यासाठी लागत असत. उदाहरणार्थ, एका चौरसाच्या दुप्पट क्षेत्रफळाचा

चौरस काढावयाचा असेल तर दिलेल्या चौरसाच्या कर्णाएवढी बाजू घेऊन चौरस काढता येतो (आकृती 19). चौरसाच्या कर्णाची लांबी त्याच्या बाजूच्या $\sqrt{2}$ पट असते. म्हणून कर्णावर काढलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ मूळ चौरसाच्या 2 पट असते.

तसेच दिलेल्या चौरसाच्या तिप्पट क्षेत्रफळाचा चौरस काढण्यासाठी पुढील रीत करता येते. प्रथम दिलेल्या चौरसाच्या कर्णावर एक आयत काढा. त्याची दुसरी बाजू मूळ चौरसाच्या बाजूएवढी घ्या. या आयताच्या कर्णाची लांबी चौरसाच्या बाजूच्या $\sqrt{3}$ पट असते. या कर्णावर काढलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ मूळ चौरसाच्या तिप्पट असते (आकृती 20). आता पायथागोरसच्या नावाने प्रसिद्ध असलेला



आकृती 20

सिद्धांत हिंदुस्थान, इजिप्त, चीन इ. देशातील गणितज्ञांना ग्रीक भूमितीला सुरुवात होण्यापूर्वीच ठाऊक होता. त्यांना हेही ठाऊक होते की $\sqrt{2}$ या संख्येची अचूक किंमत काढता येत नाही. सुप्रसिद्ध गणिती भास्कराचार्य दुसरा (इ.स. 1150) याने आपल्या लीलावती या प्रसिद्ध ग्रंथामध्ये $\sqrt{3}$ सारख्या अपरिमेय संख्यांची अंदाजी किंमत काढण्याची रीत दिली आहे.

संख्याप्रणालीला आज दिसते ते स्वरूप येण्यास सुमारे 5000 वर्षे लागली. आधुनिक संख्याप्रणालीमध्ये सर्व संख्या वेगवेगळ्या संचांमध्ये विभागलेल्या आहेत. सर्वात प्रथम येणारा संच अर्थातच मोजसंख्यांचा संच आहे. या संख्यांना आता

नैसर्गिक संख्या (Natural Numbers) म्हणतात. हा संच N या अक्षराने दाखविला जातो. हा संच पुढीलप्रमाणे लिहिला जातो. N = {1, 2, 3, 4,...} यातील तीन टिंबे हा संच न संपणारा आहे असे दर्शवितात.

या पुढची पायरी म्हणजे नैसर्गिक संख्यांबरोबर शून्य या संख्येचा समावेश करून नवा संच बनविणे. नव्या संचाला पूर्ण संख्यांचा संच (Set of Whole Numbers) असे म्हणतात. ऋण संख्यांना पूर्वी संख्यासंचांमध्ये स्थान दिले जात नव्हते. आता त्यांना संख्यासंचात समाविष्ट करून धन पूर्णांक, शून्य आणि ऋण पूर्णांक यांचा पूर्णांक संख्यांचा संच (Set of Integers) करण्यात आला आहे. हा संच I या अक्षराने दर्शविला जातो. I = {...−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4,...} यातील टिंबे ऋण आणि धन पूर्णांकाची संख्या अमर्याद (अनंत) आहे असे दाखवितात.

$\frac{-8}{11}, \frac{4}{5}$ अशा सर्व ऋण किंवा धन अपूर्णांकासह पूर्णांक संख्यांचा संच घेतला तर जो संच तयार होतो त्याला परिमेय संख्यांचा संच असे म्हणतात. त्यातील कोणतीही संख्या $\frac{a}{b}$ या स्वरूपात, म्हणजे दोन पूर्णांकाच्या गुणोत्तराच्या स्वरूपात लिहिता येते. उदाहरणार्थ $\frac{2}{3}, \frac{-3}{5}$ इ. पूर्णांक संख्यासुद्धा $3 = \frac{6}{2}, 7 = \frac{21}{3}$ अशा रीतीने गुणोत्तर रूपात लिहिता येतात. परिमेय संख्यांचा संच Q अक्षराने दर्शवितात.

$$Q = \{..., -2, \frac{-3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...\}$$

संख्या लिहिण्याच्या नवीन पद्धती

संख्या लिहिण्याच्या दोन अलीकडच्या पद्धतींची आता माहिती करून घेऊ. अपूर्णांकयुक्त संख्या लिहिण्याच्या एका पद्धतीला ''दशांश'' पद्धती म्हणतात. संख्या लिहिण्याची दशमान पद्धती अपूर्णांकांनाही लागू केली म्हणजे दशांश अपूर्णांक तयार होतात. पुढे दिलेले 10 चे घात पहा.

$$..., 10{,}000, 1{,}000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, ...$$

एकक स्थानाच्या उजवीकडे प्रत्येक स्थानाची किंमत $\frac{1}{10}$ ने कमी होत जाते. दशमान पद्धतीत संख्येच्या अंकाला त्या त्या स्थानाच्या किंमतीने गुणतात. त्याचप्रमाणे एकक स्थानाच्या उजवीकडे लिहिलेल्या अंकांना त्या त्या स्थानाच्या किंमतीने गुणून त्यांची बेरीज केली की संख्येचा अपूर्णांकयुक्त भाग आपल्याला मिळतो. अपूर्णांकाचा भाग सुरू झाला हे दाखविण्यासाठी एकक स्थानानंतर एक

टिंब देतात. त्याला 'दशांश चिन्ह' असे म्हणतात. उदाहरणार्थ 234.567 ही संख्या खाली दाखविल्याप्रमाणे तयार होते.

100	10	1	.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
10^2	10^1	10^0	.	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
2	3	4	.	5	6	7

म्हणजेच

$$2 \times 100 + 3 \times 10 + 4 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100} + 7 \times \frac{1}{1000}$$

नेहमीच्या मिश्र अपूर्णांकरूपात ही संख्या $234\frac{567}{1000}$ अशी लिहिली जाते.

दशांश रूपात संख्या लिहिणे अतिशय सोयीचे असते. या संख्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना संख्यांचे अंक त्यांच्या स्थानांप्रमाणे नेमके एकाखाली लिहिले की मग फक्त पूर्णांकांप्रमाणे बेरीज किंवा वजाबाकी करावयाची असते. दोन दशांश रूपांतील संख्याचा गुणाकार करताना प्रथम दोन पूर्णांकाप्रमाणे गुणाकार करतात. नंतर दोन्ही संख्यांमधील दशांश स्थळांची बेरीज करून तेवढी स्थळे उजवीकडून डावीकडे मोजून त्या ठिकाणी दशांश चिन्ह देतात. भागाकार करताना दोन पूर्णांकांचा भागाकार करून भाज्यातील एकक स्थानाचा अंक घेतल्यावर भागाकारामध्ये दशांश चिन्ह देऊन पुढे शून्ये देऊन भागाकार पूर्ण करतात. साध्या अपूर्णांकाचे दशांश रूप केल्यास खंडित किंवा अखंडित दशांश अपूर्णांक मिळतो. ज्या अपूर्णांकाच्या छेदात फक्त 2 किंवा 5 चे घात असतात त्याचा दशांश अपूर्णांक खंडित असतो. उदा. $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{2} = 0.5$ उलट $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$ असे अपूर्णांक घेतले तर त्यांच्या दशांश रूपात अखंडित आवर्ती अपूर्णांक येतात. जसे $\frac{2}{3} = 0.666...$, $\frac{2}{9} = 0.222....$ $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ अशा अपरिमेय संख्यांनाही दशांश अपूर्णांकाचे स्वरूप देता येते. मात्र हे अपूर्णांक अखंडित आणि अनावर्ती असतात. अशा अपूर्णांकातील जेवढी अधिक दशांश स्थळे घेऊ तेवढी संख्येची अधिक अचूक किंमत मिळते.

संख्या लिहिण्याची दुसरी पद्धत म्हणजे जगभरातील शास्त्रज्ञांनी लांबी, काळ, बल इ. भौतिक राशींच्या किंमती लिहिण्यासाठी अंगिकारलेली पद्धत होय. या पद्धतीत सुद्धा संख्या दशांश अपूर्णांकात लिहिल्या जातात. मात्र राशीमध्ये जेवढी आवश्यक असतील तेवढी दशांश स्थळे घेतली जातात. उदाहरणार्थ रेषाखंडाची लांबी मोजताना मिलिमीटरच्या दहाव्या भागापर्यंत मोजली असेल आणि त्याची

लांबी 27.15 सेंमी अशी दोन द 'ांश स्थळापर्यंत मोजली असेल तर ती 2.715 × 10 सेंमी. अशी लिहिलं जाते. या रीतीमध्ये दशांश अपूर्णांकातील पूर्णांकात फक्त एकक स्थळावरच अंक लिहिला जातो. उरलेले अंक दशांश टिंबानंतर लिहितात. नंतर या संख्येला 10 च्या योग्य त्या घाताने गुणले जाते. उदाहरणार्थ, पृथ्वीची त्रिज्या 6,700 किमी. आहे. ती 6.7×10^6 मी. अशी SI पद्धतीत लिहिली जाते. ब्रोमिनच्या अणूची त्रिज्या 1.14 A° (A° = अँगस्ट्रॉम) $1A^\circ = 10^{-10}$ मी. म्हणून ब्रोमिन अणूची त्रिज्या 1.14×10^{-10} मी. अशी लिहिली जाते. अशा पद्धतीने संख्या लिहिणे हे दोन राशींची तुलना करण्यासाठी अतिशय सोयीचे ठरते. वरील दोन उदाहरणातून हे सहज लक्षात येते की पृथ्वीची त्रिज्या ब्रोमिन अणूच्या त्रिज्येच्या $\frac{6.7 \times 10^6}{1.14 \times 10^{-10}}$ म्हणजेच 10^{16} पट आहे. 10^{16} ही संख्या इतकी मोठी आहे की $\frac{6.7}{1.14}$ हे गुणोत्तर विचारात घेण्याचीही जरुरी नाही. अशा प्रकारच्या तुलनेला राशींच्या परिमाणांची तुलना (Order of Magnitude) असे म्हणतात. विज्ञानामध्ये या कल्पनेला फार महत्त्व आहे.

काही चमत्कारिक संख्या

काही संख्या अशा आहेत की आधुनिक गणिताचा पाया त्यांच्यावर आधारलेला आहे. पण त्या संख्या नेमक्या काय आहेत हे मात्र ठाऊक नाही. अशा संख्यांपैकी सर्वात प्रसिद्ध संख्या ग्रीक लिपीतील π (पाय्) या अक्षराने दर्शविली जाते. $\frac{22}{7}$ या सर्वांना अत्यंत परिचित असलेल्या संख्येने तिची अंदाजी किंमत सांगितली जाते. या संख्येची किंमत 3 आणि 4 यांच्या दरम्यान आहे एवढीच तिच्याबद्दल माहिती आहे. परंतु हा जरा ढोबळ अंदाज झाला. याहून अधिक चांगला अंदाज म्हणजे तिची किंमत 3.1 आणि 3.2 यांच्या दरम्यान आहे. या संख्यांच्या दरम्यान आपण जेवढी दशांश स्थळे जास्ती घेऊ तेवढी तिची अधिक अचूक किंमत आपल्याला मिळते. आता संगणकाच्या साह्याने π ची किंमत दहा लक्ष दशांश स्थळांपर्यंत काढण्यात आली आहे.

π या संख्येने वर्तुळाचा परिघ आणि व्यास यांचे गुणोत्तर दाखविले जाते. ऐतिहासिक काळापासून निरनिराळ्या लोकांनी π च्या अंदाजी किंमती काढलेल्या आहेत. प्राचीन काळी हिब्रू लोकांनी 'सॉलोमन' चे मंदिर बांधले. त्यावेळी π ची 3 ही किंमत त्यांनी धरली आणि ती पुरेशी ठरली. या मंदिरापुढे शोभेसाठी एक लहानसे तळे बांधले होते. बायबलच्या 'राजाचे पहिले पुस्तक' (First Book of

Kings) या भागात त्याच्याबद्दल पुढील मजकूर लिहिला आहे. 'त्याने एक तळे तयार केले. त्याच्या एका काठापासून दुसऱ्या काठापर्यंतचे अंतर 10 क्युबिट होते, आणि त्याच्या परिघाची लांबी 30 क्युबिट होती.' बॅबिलोनियन लोक π ची किंमत $3\frac{1}{8}$ धरत असत. तर इजिप्शियन लोक ती किंमत $3\frac{12}{81}$ इतकी धरत असत. प्राचीन हिंदू लोक वर्तुळाएवढ्या क्षेत्रफळाचा चौरस काढण्यासाठी π ची किंमत 3.1416 इतकी धरत. चिनी लोक π ची किंमत 3.16 ही धरत असत. सू चुंग ची (Tsu Ch'ung Chih) याने मात्र π ची किंमत 3.1415926 आणि 3.1415927 यांच्या दरम्यान असते असे दाखविले होते. π ही संख्या निरनिराळ्या संख्यांच्या गुणोत्तराने दाखविली जात होती तरी ही गुणोत्तरे निरनिराळ्या प्रश्नांची उत्तरे शोधताना मिळालेली होती. π या संख्येला स्वतंत्र स्थान प्राप्त झालेले नव्हते. आर्किमिडीजमुळे π ला स्वतंत्र स्थान अणि महत्त्व मिळाले. π म्हणजे कोणत्याही वर्तुळाचा परिघ आणि त्याचा व्यास यांचे गुणोत्तर असते हे त्याने प्रथम दाखविले आणि या गुणोत्तराची किंमत $3\frac{10}{71}$ आणि $3\frac{1}{7}$ यांच्या दरम्यान असते असेही दाखवून दिले. त्यावरून π ची $3\frac{1}{7}$ म्हणजेच $\frac{22}{7}$ ही अंदाजी किंमत रूढ झाली. मात्र या गुणोत्तराला आर्किमिडीजने कोणतेही अक्षराचे चिन्ह दिले नव्हते. त्यासाठी π हे अक्षर प्रथम विल्यम जोन्स याने इ.स. 1706 मध्ये वापरले. इ.स. 1964 मध्ये एका गंमतीदार प्रसंगाने π ची आणखी एक किंमत अचानक मिळाली. 1964 मध्ये इंग्लिश दूरचित्रवाणीने आपल्या टी.व्ही. च्या पडद्यावर 625 रेघा दाखविण्यास सुरुवात केली. तेव्हा पाय टेलिव्हिजन (Pye Television) नावाच्या कंपनीतील एका इंजिनियरने सहज $\frac{1964}{625}$ या गुणोत्तराची किंमत काढली. ती नेमकी π च्या अंदाजी किंमतीएवढी (3.1424) आली. सन 1949 पासून गणितज्ञांनी π ची किंमत काढण्यासाठी संगणकाचा उपयोग करावयास सुरुवात केली. आणि अधिकाधिक दशांश स्थळांपर्यंत किंमती काढल्या. 1984 मध्ये तर जपानी शस्त्रज्ञांनी 20 लक्ष दशांश स्थळापर्यंत π ची किंमत काढली. संख्या आपल्याला व्यवहारात उपयोगी पडतात म्हणून त्यांचे महत्त्व आहेच. परंतु केवळ कुतूहल म्हणूनही संख्यांचा अभ्यास अत्यंत मनोरंजक आणि महत्त्वाचा असतो. 'संख्यांची उपपती' (Number Theory) किंवा 'उच्च अंकगणित' (Higher Arithmetic) या नावाने ओळखल्या जाणाऱ्या गणिताच्या शाखेमध्ये संख्या आणि त्यांचे गुणधर्म यांचा अभ्यास केला जातो.

π ही संख्या 'वर्तुळ फले' (Circular functions) किंवा 'त्रिकोणमितीय फले' (Trigonometric functions) या नावाने ओळखल्या जाणाऱ्या फलांचा पाया आहे. त्रिकोणमितीमध्ये कोनाच्या मापनासाठी 'रेडियन' (Radian) हे एकक वापरतात. या एककाप्रमाणे 2π रेडियन म्हणजे 360° हे सूत्र मिळते. म्हणून त्रिकोणमितीय फले π च्या रूपात लिहिली जातात. वर्तुळाचा परिघ काढण्यासाठी π चा उपयोग करावा लागतो. म्हणूनच तंत्रज्ञानामध्येही π ही संख्या पायाभूत ठरली आहे. आधुनिक विद्युतशास्त्र, तरंगांचे प्रसारण, खगोलशास्त्रीय गणिते इ. विषय त्रिकोणमितीय फलांवर आधारित आहेत. म्हणूनच π हा आधुनिक विज्ञानाचा पाया आहे असे म्हणावयास हरकत नाही.

π प्रमाणेच आणखी एक चमत्कारिक आणि वैशिष्ट्यपूर्ण संख्या e या अक्षराने दर्शविली जाते. π प्रमाणे e ही संख्याही आधुनिक गणितामधील पायाभूत संख्या आहे. अनेक त्रिकोणमितीय फले, तसेच 'हायपरबोलिक' आणि 'एक्सपोनेन्शिअल' फले e या संख्येवर आधारलेली असतात. π प्रमाणे e ही सुद्धा एक अपरिमेय संख्या असून तिची नेमकी किंमत काढता येत नाही. मात्र ही किंमत 2 आणि 3 यांच्या दरम्यान आहे एवढे सांगता येते. e ची किंमत काढण्यासाठी

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

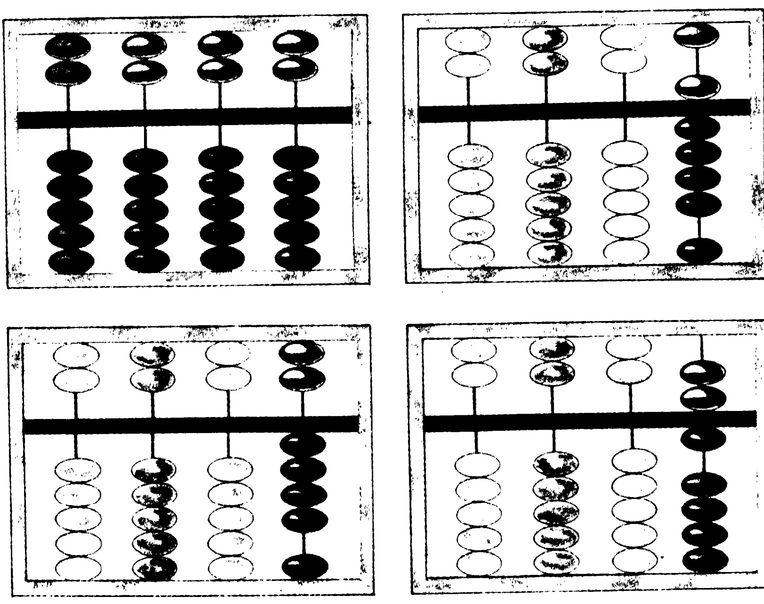
या अनंत पदांच्या श्रेढीची बेरीज करावी लागते. ती 2 पेक्षा जास्ती आणि 3 पेक्षा कमी असते. e ची इष्ट दशांश स्थळापर्यंत किंमत काढण्यासाठी या श्रेढीची योग्य तेवढी पदे घ्यावी लागतात.

चमत्कारिक संख्यांच्या मालिकेत आणखी एक संख्या आहे. ती i या अक्षराने दाखविली जाते. या संख्येला 'अवास्तव संख्या' (Imaginary Number) असे म्हणतात कारण ती वास्तव संख्यांच्या संचात बसत नाही. i ची किंमत $\sqrt{-1}$ अशी मानलेली आहे. वास्तवसंख्या धन किंवा ऋण असली तरी तिचा वर्ग मात्र नेहमी धन असतो. परंतु $\sqrt{-1}$ या संख्येचा वर्ग -1 म्हणजे ऋण असतो. जिचा वर्ग ऋण संख्या आहे अशी कोणतीही वास्तव संख्या नाही. म्हणूनच i या संख्येला 'अवास्तव' संख्या म्हणतात. परंतु वर्गसमीकरणे सोडविताना ऋण संख्येचे वर्गमूळ काढावे लागते हे प्राचीन गणितज्ञांना ठाऊक होते. या संख्यांना 'imaginary' हे नाव दे कार्ते या फ्रेंच गणितज्ञाने दिले. $a + b(\sqrt{-1})$ या स्वरूपाच्या म्हणजेच

$a + bi$ या स्वरूपाच्या संख्येला अवास्तव संख्या (Complex Number) असे म्हणतात. या संख्या आधुनिक गणितात सर्रास वापरल्या जातात. अवास्तव संख्यांवर आधारलेली अनेक फले गणितात व विज्ञानात वापरली जातात.

संख्यांची आकडेमोड करणे

मानवी संस्कृतीचा विकास आणि निरनिराळ्या संख्यांची आकडेमोड करण्याच्या रीतींचा विकास एकमेकांबरोबरच झाला आहे. उदाहरणार्थ आकडेमोड करण्यासाठी लॉगरिथमचा शोध लावल्यानंतर आणि त्रिकोणमितीय कोष्टके तयार झाल्यानंतर नौकानयनामध्ये प्रगती घडून आली. 'स्लाइड रूल' चा शोध लागल्यावर तंत्रज्ञानाची प्रगती झाली, तर सध्याच्या युगाला 'संगणकाचे युग' म्हटले जाते.



आकृती 21

आकडेमोड करण्याचे पहिले साधन म्हणजे 'अबकस' (Abacus) हे होय (आकृती 21). एका चौकटीमध्ये उभ्या तारा बसवितात. एका आडव्या पट्टीने चौकटीचे दोन भाग करतात. वरच्या भागात प्रत्येक तारेवर दोन मणी बसविलेले असतात, तसेच खालच्या भागात पाच मणी असतात. वरच्या प्रत्येक मण्याची किंमत 5 असते आणि खालच्या प्रत्येक मण्याची किंमत 1 असते. या साधनाला

'अबकस' म्हणतात. ते बेरीज, वजाबाकी करण्यासाठी वापरले जात असे. अबकसची निर्मिती कशी झाली हे ज्ञात नसले तरी ते 3000 वर्षांपूर्वीपासून चीनमध्ये वापरले जात असे. आजही चीन आणि जपानमध्ये अबकस सर्रास वापरले जाते.

गुणाकार

गुणाकार म्हणजे एकाच संख्येची पुन्हा पुन्हा बेरीज करणे. 2 या संख्येच्या पहिल्या दहा पटीतील संख्या पुढील प्रमाणे आहेत.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

यापुढील पटीही काढता येत असल्या तरी त्यांची सहसा गरज पडत नाही. पहिल्या

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

आकृती 22

दहा पटींचा उपयोग करून पुढील पटी काढता येतात. उदा. 2 × 16 ही संख्या हवी असेल तर पुढील प्रमाणे काढता येते.

$2 \times 16 = 16 \times 2 = (10 + 6) \times 2 = 10 \times 2 + 6 \times 2 = 20 + 12 = 32.$

पुढे दिलेले गुणाकाराचे कोष्टक नेहमी लागणाऱ्या गुणाकार, भागाकारांची आकडेमोड करण्यास पुरेसे असते (आकृती 22).

हिंदुस्थानामध्ये गुणाकाराची कोष्टके फार प्राचीन काळापासून तयार करण्यात आली होती. पहिल्या 30 नैसर्गिक संख्यांची 10 पटींपर्यंत तसेच अपूर्णांकांची

100 पटीपर्यंतची कोष्टके तयार करण्यात आली. गेल्या 2000 वर्षांपासून ही कोष्टके आकडेमोडीसाठी वापरली जात आहेत. गुणाकाराची कोष्टके भागाकारासाठीही वापरता येतात. उदाहरणार्थ $3 \times 4 = 12$, आणि $12 \div 4 = 3$. केवळ अत्यंत कठिण अशी घात किंवा मूळ काढण्याची गणिते सोडली तर इतर सर्व तऱ्हेची जलद आणि अचूक आकडेमोड करण्यासाठी गुणाकाराची कोष्टके हे एक अत्यंत प्रभावी साधन आहे.

लॉगरिथम

पंधराव्या शतकात ग्रेट ब्रिटन, डेन्मार्क, स्पेन, पोर्तुगाल इत्यादी देशांनी मोठ्या प्रमाणात समुद्र सफरी केल्या. समुद्रामध्ये जहाजाचा मार्ग निश्चित करण्यासाठी तारे आणि ग्रह यांच्या स्थितीचे अचूक ज्ञान असणे आवश्यक ठरले. त्यांच्या स्थिती गणिताने काढण्यासाठी त्रिकोणमितीय कोष्टके तयार करावी लागली. ही कोष्टके तयार करण्याकरिता अत्यंत किचकट आकडेमोड करावी लागत असे. हे काम सुकर व्हावे म्हणून लॉगरिथमचा शोध लावण्यात आला.

लॉगरिथममुळे गुणाकाराच्या गणिताचे रूपांतर बेरजेत करता येते, तसेच भागाकाराचे रूपांतर वजाबाकीमध्ये होते. त्यामुळे आकडेमोडीचे काम अत्यंत सोपे होते.

संगणक

आकडेमोडीसाठी आजपर्यंत जेवढी साधने निर्माण करण्यात आली त्यामध्ये संगणक हे अत्यंत कार्यक्षम असे सर्वोत्कृष्ट साधन आहे. संगणक अतिशय मोठ्या संख्यांची आकडेमोड अत्यंत वेगाने आणि अचूकतेने करू शकतो. संगणकामध्ये आकडेमोडीसाठी लागणाऱ्या सर्व तार्किक क्रिया करणारी इलेक्ट्रॉनिक मंडले असतात. परंतु संगणकामध्ये शब्दांची भाषा वापरली जात नाही. त्यामध्ये केवळ संख्यांवर आधारलेली भाषाच वापरली जाते. संगणकाच्या संख्यायुक्त भाषेतील शब्द फक्त 1 आणि 0 या दोनच अंकांपासून बनविलेले असतात. त्यातील संख्या 2 च्या घाताच्या रूपात लिहिलेल्या असतात. त्यांच्या स्थानिक किंमती खालीलप्रमाणे असतात.

$$\ldots\ 2^8\ 2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$$

या स्थानिक किंमती वापरून दशमान पद्धतीतील संख्या संगणकाच्या द्विचिन्ह पद्धतीमध्ये रूपांतरित करता येतात. उदाहरणार्थ

1	=	1
2	=	10
3	=	101
4	=	100
5	=	101
6	=	110
7	=	111
8	=	1000
9	=	1001
10	=	1010 इ.

संगणकाच्या मंडलामध्ये 1 या संख्येने पूर्ण झालेले बंद मंडल (Closed Circuit) आणि 0 या संख्येने अपूर्ण किंवा खुले मंडल (Open Circuit) दाखविले जाते. संगणकाला सांकेतिक आज्ञा दिल्या जातात. त्यांना आज्ञावली (प्रोग्रॅम) असे म्हणतात. या सांकेतिक आज्ञा साध्या भाषेचे संगणकाच्या गणिती भाषेत आणि संगणकाच्या गणिती भाषेचे साध्या भाषेत रूपांतर करतात. आकडेमोड करताना संगणक गुणाकाराचे रूपांतर बेरजेत आणि भागाकाराचे रूपांतर वजाबाकीत करतो. हे पुन्हा प्राथमिक अवस्थेकडे जाणे आहे असे वाटते. परंतु संगणक या क्रिया अतिशय वेगाने करत असल्यामुळे हे कोणी मनावर घेत नाही. आता अत्यंत क्लिष्ट असे सर्व प्रकारचे प्रश्न सोडविण्यासाठी संगणकाचे प्रोग्रॅम तयार केले जातात. समीकरणे सोडविणे, आकृती आणि चित्रे काढणे, पुस्तक छापणे, आगगाडी किंवा विमानाचे आरक्षण करणे अशी अनेक कामे आता संगणकाच्या साहाय्याने केली जातात. संगणक हा आता आधुनिक जीवनाचा मुख्य आधार बनला आहे. असे म्हणावयास हरकत नाही की, आपण आता एक आणि शून्य यांच्या जगात वावरत आहोत.

3

चलराशी

दैनंदिन जीवनातील अनेक प्रसंगी आपल्याला गणिताचा उपयोग होतो. हे प्रसंगही कितीतरी विविध प्रकारचे असतात.

दिवसभरात आपण जे व्यवहार करतो त्यात अनेक वेळा अशा राशी येतात की त्यांची किंमत आपल्याला नक्की ठाऊक नसते, किंवा ती सारखी बदलते. उदाहरणार्थ, आपण बसमधून प्रवास करतो तेव्हा बसचा वेग सारखा बदलत असतो. बसच्या प्रत्येक थांब्यावर बसमधील उतारूंची संख्या कमी-जास्त होते. तसेच बस कण्डक्टर जवळची रक्कमही सारखी बदलते. खरे म्हणजे आपले सारे जीवन सतत बदलणाऱ्या राशींनी भरलेले आहे. एखाद्या व्यक्तीचा महिन्याचा खर्च, धंद्यात झालेला नफा, शेतीतील उत्पन्न, वर्षभरात पडणारा पाऊस, हवेचे तापमान, एखाद्या रोपाची उंची, इतकेच काय रोजचे दिनमान या सर्व बदलणाऱ्या म्हणजेच चल राशी आहेत.

ज्यांच्या किंमती ठाऊक नाहीत अशा 'अज्ञात' राशी आणि ज्यांच्या किंमती बदलतात अशा चल राशी व्यक्त करण्यासाठी वेगळी चिन्हे वापरावयास हवीत हे सर्वात प्रथम हिंदू गणितज्ञांनी ओळखले. इ.स. पूर्व 300 सालाच्याही आधीच्या काळातील एका हस्तलिखितामध्ये हिंदू गणितज्ञांनी अज्ञात राशी दाखविण्यासाठी 'यावत् तावत्' (अमुक इतके) ही संज्ञा वापरलेली आढळते. त्या नंतरच्या गणितज्ञांनी अज्ञात संख्येसाठी 'यावत्-तावत्' च्या ऐवजी 'अव्यक्त' ही संज्ञा वापरण्यास सुरुवात केली. (अव्यक्तच्या उलट व्यक्त म्हणजे ज्ञात संख्या).

अलीकडच्या संशोधनावरून असे आढळले आहे की बॅबिलोनियन लोकही चल राशींची गणिते करत असत. मात्र चल राशींसाठी ते वेगळी चिन्हे वापरत नसत. त्याऐवजी ते या राशी शब्दांनी व्यक्त करत. म्हणून त्यांच्या गणिताला Rhetoric Algebra (शाब्दिक गणित) असे म्हणत. इजिप्शियन लोकांच्या 'पॅपिरस' नावाच्या प्राचीन लेखांमध्ये (इ.स. पूर्व 1600) अज्ञात संख्यांची गणिते असून त्यात अज्ञात संख्येला 'हाऊ' (hau) म्हणजे ढीग असे म्हटले आहे.

आर्यभट्ट (पहिला), ब्रह्मगुप्त, भास्कराचार्य (दुसरा) हे काही सुप्रसिद्ध प्राचीन गणिती होते. त्यांनी चल संख्यांच्या गणितांच्या म्हणजेच बीजगणिताच्या पद्धती निर्माण केल्या आणि पूर्णत्वास नेल्या. बीजगणित या शब्दांचा अर्थ 'अक्षरांचे गणित' असा आहे.

डायोफँटस हा ग्रीक गणिती इ.सनाच्या तिसऱ्या शतकात होऊन गेला. त्याने बीजगणितामध्ये बरीच प्रगती केली. निरनिराळे प्रश्न समीकरणाच्या रूपात मांडून त्यातील अज्ञात संख्या अक्षराने दाखविण्याची पद्धत त्याने सुरू केली. त्याने घेतलेले अक्षर ग्रीक लिपीतील Σ (सिग्मा) या अक्षरासारखे होते. समीकरणातील शब्दांसाठी फक्त त्यांची आद्याक्षरे वापरण्याची पद्धतही त्याने सुरू केली. सोळाव्या शतकातील फ्रेंच गणिती फ्रँका व्हीटा याने चल संख्या दाखविण्यासाठी *a, e, i, o, u* ही अक्षरे वापरली. तसेच गणितातील अज्ञात पण स्थिर रहाणाऱ्या संख्यांसाठी *b, c, d, f, g* इत्यादी व्यंजने वापरली. नंतर 16 व्या शतकातील प्रसिद्ध फ्रेंच गणिती आणि तत्त्वज्ञ रेने देकार्त याने समीकरणातील स्थिर संख्या दाखविण्यासाठी *a, b, c,* इ. अक्षरे वापरण्याची प्रथा सुरू केली. गणितातील स्थिर किंवा चल अज्ञात संख्या दाखविण्यासाठी अक्षरांचा उपयोग करणे ही कल्पना म्हणजे अंकगणिताच्या संबोधांचे सामान्यीकरण करण्याची पहिली पायरी होती. ही गणिताच्या पुढील प्रगतीची गुरुकिल्ली होय.

इ.सनाच्या नवव्या शतकामध्ये महंमद इब्न मेसाअल्-ख्वारिझ्मी हा गणिती इराण देशात होऊन गेला. त्याने अरबी भाषेत 'अल्-जब्र वाल मुकाबला' या नावाचे बीजगणितावरील पुस्तक लिहिले. या पुस्तकाच्या नावावरूनच बीजगणिताला 'अल्जिब्रा' हा शब्द इंग्रजी भाषेत आला आहे. पुस्तकाच्या नावाचा खरा शब्दश: अर्थ 'ऋण संख्या पूर्ववत् करणे' असा आहे. अल्जब्र या शब्दाने त्याने समीकरणातील एका बाजूची ऋण संख्या विरुद्ध बाजूला नेऊन घन करणे या क्रियेचा उल्लेख केला होता. जेव्ह अरब लोक स्पेन देशात आले तेव्हा अल्जब्र् हा शब्द त्यांनी आणला. नंतरच्या काळात अल्जब्र् या शब्दाचे अलजिब्रा या शब्दात रूपांतर झाले, आणि तो शब्द केवळ एका क्रियेसाठी न वापरता बीजगणितातील सर्वच क्रियांसाठी रूढ झाला.

गणितातील आकृतिबंध

बीजगणिताचे सर्वात महत्त्वाचे कार्य म्हणजे गणितामधील आकृतिबंधांचे सामान्य स्वरूप व्यक्त करणे हे आहे. उदाहरणार्थ, अंकगणितातील बेरजेची क्रिया पहा. पुढील उदाहरणे पहा:

$$3 + 4 = 7 = 4 + 3$$
$$5 + 10 = 15 = 10 + 5$$
$$6 + 7 = 13 = 7 + 6 \text{ इ.}$$

यापैकी मधील उभी ओळ गाळून बेरजा लिहिल्या तर पुढील समीकरणे मिळतात.

$$3 + 4 = 4 + 3$$
$$5 + 10 = 10 + 5$$
$$6 + 7 = 7 + 6$$

जर या समीकरणांमध्ये संख्यांऐवजी अक्षरे घातली तर आपल्याला

$$a + b = b + a$$

हे समीकरण मिळते. हे एकच समीकरण वरील प्रकारच्या सर्व अंकयुक्त समीकरणांचे सामान्य स्वरूप व्यक्त करते. म्हणून त्याला अशा समीकरणांचा 'नमुना' असे म्हणतात. या समीकरणाने बेरजेच्या क्रियेचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म दाखविला जातो. तो असा की 'बेरजेतील दोन संख्यांचा क्रम कसाही असला तरी बेरीज तेवढीच येते.' या गुणधर्माला 'बेरजेची क्रमनिरपेक्षता' असे म्हणतात. पुढे दिलेले नियम बेरीज आणि गुणाकार या क्रियांचे अतिशय महत्त्वाचे गुणधर्म व्यक्त करतात. हे नियम गणिते करताना नेहमी वापरले जातात. पुढील समीकरणात a, b, c ही अक्षरे कोणत्याही संख्या दर्शवितात.

$a + b = b + a$ (बेरजेचा क्रमनिरपेक्षता गुणधर्म)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (बेरजेचा साहचर्य गुणधर्म)

$a \times b = b \times a$ (गुणाकाराचा क्रमनिरपेक्षता गुणधर्म).

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (गुणाकाराचा साहचर्य गुणधर्म).

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (गुणाकाराचा वितरण गुणधर्म).

पूर्वी उल्लेख केल्याप्रमाणे शून्य या संख्येचा आणि तिच्या गुणधर्मांचा शोध ही गणिताच्या जगातील एक अत्यंत महत्त्वाची घटना होती. आर्यभट्ट आणि इतर हिंदू गणितज्ञांनी शून्याच्या विशिष्ट गुणधर्मांचा अभ्यास करून, त्या काळच्या रीतीप्रमाणे हे गुणधर्म श्लोकांच्या रूपात लिहून ठेवले होते. सध्याच्या पद्धतीप्रमाणे हे गुणधर्म पुढीलप्रमाणे लिहिता येतात.

$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$
$$a - 0 = a$$

$a \div 0$ ची किंमत काढता येत नाही.

मात्र शून्याने भाग दिला तर काय होते हे त्यांना स्पष्ट करता आले नव्हते.

निरनिराळ्या क्रियांचे गुणधर्म आपल्याला कसे उपयोगी पडतात ते पाहू. आपल्याला नेहमी पैशाचे व्यवहार करताना हिशेब ठेवावे लागतात. समजा आपल्याला 50 रु., 100 रु., 45 रु., आणि 40 रु. अशा रकमांची बेरीज करावयाची आहे. एका वेळी दोनच संख्यांची बेरीज करता येते. म्हणून ही बेरीज पुढील प्रमाणे करता येते.

$$\begin{aligned} 50 + 100 + 45 + 40 &= (50 + 100) + 45 + 40 \\ &= (150 + 45) + 40 \\ &= 195 + 40 \\ &= 235. \end{aligned}$$

हीच बेरीज खाली दाखविल्याप्रमाणे केली तरी काही बिघडत नाही.

$$\begin{aligned} 50 + 100 + 45 + 40 &= 50 + 100 + (45 + 40) \\ &= 50 + (100 + 85) \\ &= 50 + 185 \\ &= 235. \end{aligned}$$

थोडक्यात बेरजेतील संख्या कोणत्याही क्रमाने मिळविल्या तरी चालते. या रीतीने बेरजेचे क्रमनिरपेक्षता आणि साहचर्य हे गुणधर्म आपल्या व्यवहारात नकळतच सर्रास वापरले जातात. गुणाकाराच्या बाबतीतही हेच घडते. 2×17 हा गुणाकार बहुधा 17×5 असा केला जातो. कारण त्याचे उत्तर 17 च्या पाढ्यातून सहज मिळते. $12 \times 5 \times 2$ हा गुणाकार करावयाचा असेल तर तो असा करतात.

$$\begin{aligned} 12 \times 5 \times 2 &= (12 \times 5) \times 2 \\ &= 60 \times 2 \\ &= 120. \end{aligned}$$

हाच गुणाकार $12 \times (5 \times 2) = 12 \times 10 = 120$ असाही करता येतो.

कठिण उदाहरणे सोडविताना वरील गुणधर्मांचा उपयोग फायदेशीर ठरतो. उदाहरणार्थ, $137 \times 5 \times 2$ हा गुणाकार (137×5) असा करण्यापेक्षा $137 \times (5 \times 2)$ म्हणजे 137×10 असा करणे सोपे आहे.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

हा गुणाकाराचा वितरण नियम मोठ्या संख्यांचे गुणाकार करताना फार उपयोगी पडतो. समजा 256×7 असा गुणाकार करावयाचा असेल तर तो

$$\begin{aligned} (256 \times 7) &= (200 + 50 + 6) \times 7 \\ &= 1400 + 350 + 42 \\ &= 1792. \end{aligned}$$

असा केला जातो. प्रत्यक्षात हा गुणाकार तोंडी करताना प्रत्येक पायरीला गुणाकारातील हातचे पुढच्या गुणाकारात मिळवत जाऊन गुणाकार पूर्ण केला जातो. क्रियांचे गुणधर्म हा आपल्या दैनंदिन जीवनाचा अविभाज्य भागच बनलेला आहे हे वरील उदाहरणांवरून सहज लक्षात येईल.

समानता संबंध

एखाद्या बैजिक राशीतील अक्षरांना संख्यांच्या किंमती दिल्या तर त्या राशीची किंमत आपल्याला मिळते. जर अशा रीतीने दोन बैजिक राशींच्या किंमती काढल्या आणि जर त्या दोन्ही राशींची किंमत एकच आली तर त्या राशींना *सममूल्य राशी* (Equivalent) म्हणजे एकच किंमत असलेल्या राशी असे म्हणतात. अशा दोन राशींमध्ये *समानता संबंध* आहे असे म्हणतात. समानता संबंध समीकरणाच्या स्वरूपात लिहिला जातो. उदाहरणार्थ $a \times (b + c)$ आणि $a \times b + a \times c$ या दोन्ही राशी सममूल्य आहेत.

समजा, $a = 2,\ b = 3$ व $c = 4$ तर

$$a \times (b + c) = 2 \times (3 \times 4)$$
$$= 2 \times 7$$
$$= 14.$$

आणि $a \times b + a \times c = 2 \times 3 + 2 \times 4$

$$= 6 + 8$$
$$= 14$$

म्हणजेच $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

अशा तऱ्हेच्या अनेक सममूल्य बैजिक राशी रोजच्या व्यवहारात त्याच प्रमाणे विज्ञानात आणि गणितात वापरल्या जातात. सममूल्य राशींचा उपयोग एखादा प्रश्न सोडविताना कसा होतो हे समजण्यासाठी पुढील प्रश्न पहा.

एका फुटबॉल क्लबमध्ये तीन नवे सदस्य आले. एका महिन्यानंतर निम्म्या सदस्यांनी क्लब सोडला. त्यानंतर दोन महिन्यांनी दहा नवे सदस्य क्लबमध्ये आले तेव्हा मूळ संख्येइतके सदस्य झाले. तर क्लबाचे मूळ सदस्य किती ?

समजा सुरुवातीला x सदस्य होते. तीन सदस्य आल्यावर त्यांची संख्या $x + 3$ झाली. त्यांच्यापैकी निम्मे सदस्य गेल्यावर ती संख्या $\frac{x + 3}{2}$ इतकी झाली. त्यांना आणखी 10 सदस्य मिळाल्यावर ती संख्या $\frac{x + 3}{2} + 10$ इतकी झाली.

ही संख्या x इतकी होती. म्हणून $\frac{x+3}{2} + 10 = x$

$$2\left[\frac{x+3}{2} + 10\right] = 2x$$
$$x + 3 + 20 = 2x$$
$$x + 23 = 2x$$
$$x + 23 - x = 2x - x$$
$$23 = x$$

समीकरण मालिका (System of equations)

भास्कराचार्यांनी आपल्या 'लीलावती' ग्रंथामध्ये पुढील प्रश्न दिला आहे. "हे गणका, जर दोन संख्यांची बेरीज 101 आहे आणि त्यांची वजाबाकी 25 आहे. तर, त्या संख्या कोणत्या हे तुला येत असेल तर सत्वर सांग."

हा प्रश्न आपण सोडवून पाहू. त्या संख्यांपैकी मोठी x आणि दुसरी y आहे असे मानू.

म्हणून
$$x + y = 101$$
$$x - Y = 25$$
$$\therefore x + y + x - y = 101 + 25$$
$$\therefore 2x = 126$$
$$\therefore x = 63$$
$$x + y = 101$$
$$\therefore 63 + y = 101$$
$$\therefore y = 101 - 63$$
$$\therefore y = 38$$

म्हणजेच त्या संख्या 63 आणि 38 आहेत. या प्रश्नाचे उत्तर मिळविण्यासाठी दोन चलांची दोन समीकरणे आपण घेतली. जटिल प्रश्नांची उत्तरे मिळविण्यासाठी अनेक समीकरणांची मालिका घेऊन ते प्रश्न सोडविले जातात.

श्रेढी

अ आणि ब हे दोन मित्र गप्पा मारत होते. ब ने अ ला म्हटले "मी तुला महिनाभर दररोज एक हजार रुपये देईन. त्याच्या बदल्यात तू मला पहिल्या दिवशी एक पैसा, दुसऱ्या दिवशी दोन पैसे याप्रमाणे रोज आदल्या दिवसाच्या दुप्पट रक्कम एक महिनाभर द्यायची." अ ने ही अट कबूल केली. पण थोड्या दिवसांनी

त्याला पश्चाताप झाला. आपण फसलो हे त्याच्या लक्षात आले. असे का बरे झाले ?

त्या प्रत्येकाला रोज किती रक्कम मिळाली असती ते आपण पाहू.

दिवस	अ (रुपये)	ब (रुपये)
1	1,000	0.01
2	2,000	0.02
3	3,000	0.04
4	4,000	0.08
5	5,000	0.16
6	6,000	0.32
7	7,000	0.64
8	8,000	1.28
9	9,000	2.56
10	10,000	5.12
11	11,000	10.24
12	12,000	20.48
13	13,000	40.96
14	14,000	81.92
15	15,000	163.84
16	16,000	327.68
17	17,000	655.36
18	18,000	1,310.72
19	19,000	2,621.44
20	20,000	5,242.88
21	21,000	10,485.76
22	22,000	20,971.52
23	23,000	41,943.04
24	24,000	83,886.08

अ ला पश्चाताप का झाला हे आता समजले का ? 23 व्या दिवशी अ ला त्याला मिळालेल्या रकमेच्या जवळजवळ दुप्पट रक्कम ब ला द्यावी लागली.

केवळ एका पैशाने सुरुवात करून ब ने अ ला कसे गाठले हे तुम्ही सांगू शकाल का ? त्या दोघांच्या रकमा कशा वाढत गेल्या हे आपण पाहू.

अ ची रक्कम

1000	2000	3000	4000	....
1000	1000 + 1000	2000 + 1000	3000 + 1000	....

ब ची रक्कम	1	2	4	8	...
	1	1×2	2×2	4×2	...

या संख्या एका श्रेढीमध्ये असून त्या विशिष्ट तऱ्हेने वाढत आहेत. पहिल्या श्रेढीतील प्रत्येक संख्या तिच्या आधीच्या संख्येपेक्षा 1000 ने जास्त आहे. दुसऱ्या श्रेढीतील प्रत्येक संख्या आधीच्या संख्येच्या दुप्पट आहे. वरील श्रेढी पाहून हे लक्षात येईल की बेरजेने श्रेढीतील संख्या हळूहळू वाढतात तर गुणाकाराने श्रेढीतील संख्या भरभर वाढतात. पहिल्या प्रकारच्या श्रेढीला *गणित श्रेढी* (Arithmatic Progression) व दुसऱ्या प्रकारच्या श्रेढीला *भूमिती श्रेढी* (Geometric Progression) असे म्हणतात. श्रेढींचा अभ्यास हा बीजगणितातील एक महत्त्वाचा भाग आहे.

श्रेढीफल : श्रेढीतील संख्यांची बेरीज.

एका प्राथमिक शाळेतील शिक्षकांनी मुलांना 1 ते 100 या सर्व संख्यांची बेरीज करण्यास सांगितले. आता आपल्याला काही काळ स्वस्थ बसता येईल असा विचार त्यांच्या मनात आला. परंतु त्यांना आश्चर्य करण्याची पाळी आली. त्यांनी गणित घातले नाही तोच एका मुलाने पाटीवर त्याचे उत्तर लिहून पाटी खाली ठेवली. शिक्षकांनी पाटी दाखविण्यास सांगितले. पाटीवर 5050 हे उत्तर होते आणि ते बरोबर होते. हा मुलगा फ्रेडरिक गॉस होय. मोठेपणी तो जगातील सर्वश्रेष्ठ गणिती म्हणून प्रसिद्ध झाला. गणित सोडविताना सर्व संख्यांची सरळ बेरीज करण्याऐवजी त्याने त्या संख्यांच्या 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98.... अशा जोड्या तयार केल्या. प्रत्येक जोडीची बेरीज 101 होती. अशा 50 जोड्या झाल्या म्हणजेच 1 ते 100 या संख्यांची बेरीज $101 \times 50 = 5050$ इतकी झाली. ही खरे म्हणजे गणितश्रेढीचे श्रेढीफल काढण्याची रीत आहे. ज्या गणितश्रेढीमध्ये n पदे आहेत, पहिले पद a आहे आणि प्रत्येक पदाची संख्या आधीच्या पदापेक्षा d ने जास्त आहे अशा गणितश्रेढीचे श्रेढीफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

या सूत्राने मिळते. या सूत्रामध्ये $a = 1$, $d = 1$ आणि $n = 100$ या किंमती घातल्या तर 1 ते 100 संख्यांची बेरीज मिळते.

$$S_n = \frac{100}{2}[2 \times 1 + (100 - 1) \times 1]$$

$$= 50\ (2 + 99)$$

$$= 50 \times 101$$

$$= 5050.$$

गॉसची बुद्धिमत्ता इतकी तीव्र होती की श्रेढीतील संख्यांचा परस्परसंबंध एका क्षणात त्याच्या लक्षात आला.

भूमितिश्रेढीचे पहिले पद a, दोन क्रमवार पदांचे गुणोत्तर r आणि पदांची संख्या n असेल तर तिचे श्रेढीफल

$$S_n = \frac{a\,(r^n-1)}{r-1}$$ या सूत्राने मिळते.

आता वरील उदाहरणातील अ आणि ब या प्रत्येकाला महिन्याच्या शेवटी किती पैसे मिळाले ते आपल्याला काढता येईल.

अ ला मिळालेली रक्कम $= S_n = \frac{30}{2}\,[2 \times 1000 + (30 - 1)\,1000]$

$= 15\,(2000 + 29000)$

$= 15 \times 31000$

$= 4,65,000$ रु.

ब ला मिळालेली रक्कम $= S_n = \frac{1\,(2^{30} - 1)}{2 - 1}$

$= 2^{30} - 1$

$= 53,68,70,912$ पैसे

$= 53,68,709.12$ रु.

रोजच्या जीवनात गणित

गणित हा आपल्या रोजच्या जीवनाचा आरसा आहे असे म्हणावयास हरकत नाही. त्यामध्ये जीवनाचे प्रतिबिंब पडलेले असते. एखादा गणिती जेव्हा प्रत्यक्ष जीवनातील प्रश्न सोडवितो तेव्हा, वण्डरलॅण्ड मधील ॲलिसप्रमाणे तो गणिताच्या आरशामध्ये त्या प्रश्नाचे प्रतिबिंब पहातो. गणिती प्रतिबिंबामधील प्रश्नाचे उत्तर तो शोधून काढतो आणि त्याचे प्रत्यक्ष जीवनातील उत्तरामध्ये रूपांतर करतो. पुढील उदाहरणावरून ही क्रिया कशी केली जाते ते स्पष्ट होईल.

विद्यार्थी वसतिगृहातील विद्यार्थ्यांची संख्या 12 वरून 16 वर गेली तेव्हा महिन्याचा खर्च 7000 रु. वरून वाढून 9000 रु. झाला. वसतिगृहाला दरमहा ठराविक भाडे द्यावे लागत होते. तसेच प्रत्येक विद्यार्थ्यावर ठराविक रक्कम निवासखर्च म्हणून खर्च करावी लागे. तर वसतिगृहाचे दरमहा भाडे किती आणि प्रत्येक विद्यार्थ्याचा निवास खर्च किती ?

या प्रश्नाचे गणिती रूपांतर करण्यासाठी प्रथम गणितातील राशी अक्षरांनी दाखवू. M ही विद्यार्थीसंख्या, A म्हणजे प्रत्येक विद्यार्थ्याचा निवास खर्च, R हे

वसतिगृहाचे भाडे आणि E हा दर महिन्याचा एकूण खर्च आहे असे मानू. यावरून $E = M \times A + R$ हे समीकरण मिळते. यामध्ये गणितात दिलेल्या किंमती घातल्या तर पुढील समीकरणे मिळतात.

$$7000 = 12A + R....(1)$$

$$9000 = 16A + R....(2)$$

आता ही समीकरणे सोडविणे हा गणिताचा प्रश्न झाला. समीकरण (2) मधून समीकरण (1) वजा करू.

$$\therefore 2000 = 4A$$

$$\therefore A = 500.$$

ही किंमत समीकरण (1) मध्ये घालू.

$$\therefore 7000 = 6000 + R$$

$$\therefore R = 1000.$$

येथे गणिताच्या प्रश्नाचे उत्तर मिळते. या उत्तराचे रूपांतर मूळ प्रश्नामध्ये केले म्हणजे प्रत्येक विद्यार्थ्याचा निवास खर्च रु. 500, आणि वसतिगृहाचे दरमहा भाडे रु. 1000 ही उत्तरे मिळतात.

वरील प्रश्न सोडविण्यासाठी आपण प्रथम प्रश्नातील राशींना अक्षरे दिली आणि $E = M \times A + R$ हे समीकरण तयार केले. हे समीकरण म्हणजे प्रत्यक्ष जीवनातील वस्तुस्थितीचे गणिती रूप म्हणजे 'गणिती प्रतिकृती' (Mathematical Model) होय. 'गणिती प्रतिकृती निर्माण करणे' (Mathematical modelling) हे प्रत्यक्ष जीवनातील प्रश्न सोडविण्याचे एक अत्यंत प्रभावी साधन आहे. आता संगणकाच्या साहाय्याने एखाद्या प्रश्नाच्या अनेक गणिती प्रतिकृती तयार करून, त्यातील राशींच्या किंमती बदलून तो प्रश्न सोडविण्याची सर्वात योग्य प्रतिकृती कोणती हे ठरविता येते. हवामानशास्त्र, विमानशास्त्र, प्रवाहांचे गतिशास्त्र, अणुविज्ञान इत्यादी विषयांतील तसेच अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, आणि संदेशवहन शास्त्रातील अत्यंत जटिल प्रश्न सोडविण्यास गणिती प्रतिकृतींचा उपयोग करावा लागतो.

4

गुणोत्तरे : संख्यांची तुलना

रोजच्या जीवनात आपल्याला दोन गोष्टींची तुलना करण्याचा वारंवार प्रसंग येतो. दुकानात एखादी वस्तू खरेदी करताना आपण तशा प्रकारच्या दोन तीन वस्तू आधी पहातो. त्यांची तुलना करून ती वस्तू घेतो. दोन प्रकारच्या नोकऱ्या आल्या तर त्यातील कोणती अधिक चांगली ते ठरवितो. 'कलकत्ता शहर मुंबईपेक्षा मोठे आहे.' 'सुभाष सतीशपेक्षा शक्तिमान आहे.' 'कल्पना कवितापेक्षा गणितात हुशार आहे.' अशा तुलना नेहमी केल्या जातात. परंतु ही विधाने जरा संदिग्ध असतात. त्यावरून कलकत्ता मुंबईपेक्षा किती मोठे आहे किंवा सतीशपेक्षा सुभाषची शक्ती किती अधिक आहे याची कल्पना येत नाही. जर तुलना करण्याच्या गोष्टींना संख्यांची जोड दिली तर तुलना योग्य प्रकारे करता येते. संख्यांची तुलना करण्यासाठी गणिताचे नियम वापरता येतात आणि योग्य तो निर्णय घेता येतो. उदाहरणार्थ कलकत्याची लोकसंख्या एक कोटी आणि मुंबईची ऐंशी लाख आहे असे म्हटले की कलकत्ता मुंबईपेक्षा मोठे आहे हे म्हणता येते, कारण एक कोटी ही संख्या ऐंशी लाख या संख्येपेक्षा मोठी आहे. अशा रीतीने दोन गोष्टींची तुलना करण्यासाठी आपण त्यांच्याशी संख्या जोडतो आणि मग तो संख्यांच्या तुलनेचा प्रश्न बनतो.

दोन संख्यांची तुलना करण्याचे दोन मार्ग आहेत. समजा a आणि b या दोन संख्या आहेत. तर आपण $a - b$ हा त्यातील फरक काढू शकतो. जसे $14 - 10 = 4$. म्हणजे ही संख्या 10 पेक्षा 4 ने मोठी आहे. तुलना करण्याची दुसरी पद्धत म्हणजे एका संख्येला दुसऱ्या संख्येने भागणे. समजा 20 आणि 10 या दोन संख्या आहेत. तर $\frac{20}{10} = \frac{2}{1}$. म्हणजेच 20 ही संख्या 10 च्या दुप्पट आहे. उलट $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. म्हणजे 10 ही संख्या 20 च्या निम्मी आहे. अशा रीतीने दोन संख्यांचे गुणोत्तर (...गाकार) एक संख्या दुसरीच्या किती पट आहे किंवा दुसरीचा कितवा भाग आहे याचे उत्तर देते. निराळ्या रीतीने सांगावयाचे तर 20 व 10 यांचे गुणोत्तर 2:1 आहे. गुणोत्तराने दोन संख्यांची तुलना करणे ही पद्धत नेहमी वापरली जाते. आणि

ती फार उपयुक्त आहे. उदाहरणार्थ, 50 ही संख्या 100 पेक्षा 50 ने कमी आहे असे म्हणण्यापेक्षा 50 ही 100 च्या निम्मी आहे असे म्हणणे अधिक चांगले ठरते. गुणोत्तरेसुद्धा निरनिराळ्या प्रकारे व्यक्त करता येतात. उदाहरणार्थ, एकाद्या कंपनीच्या वार्षिक अहवालात कंपनीची कामगिरी फार चांगली असे दाखविण्यासाठी या वर्षी कंपनीचा नफा दुप्पट झाला असे सांगितले जाते. याचा अर्थ त्या वर्षीचा नफा आणि आधीच्या वर्षीचा नफा यांचे गुणोत्तर $\frac{2}{1}$ आहे. कंपनीचे बोनस शेअर वाटताना 'बोनस शेअर' 2:1 प्रमाणात दिले जातील असे सांगतात. याचा अर्थ भागधारकाजवळच्या दोन शेअर मागे एक बोनस शेअर दिला जाईल, असा असतो. एखाद्या गावातील साक्षरतेबद्दल बोलताना 'तीन साक्षरांमागे एक निरक्षर आहे.' असे सांगितले जाते. याचा अर्थ साक्षर व निरक्षर यांचे गुणोत्तर $\frac{3}{1}$ आहे. गुणोत्तरे लिहिण्यासाठी निरनिराळ्या चिन्हपद्धती वापरल्या जातात. उदाहरणार्थ, $\frac{3}{1}$ हे गुणोत्तर 3:1 असे लिहितात. $\frac{2}{3}$ हे गुणोत्तर $2 \div 3$ किंवा 2 : 3 असेही लिहिले जाते.

a आणि b यांचे गुणोत्तर $\frac{a}{b}$ असे लिहिले असेल तर $\frac{a}{b}$ ही एक परिमेय संख्या आहे असे म्हणता येते. म्हणून गुणोत्तरांना परिमेय संख्यांचे नियम लावता येतात. उदा. $\frac{2}{3}$ व $\frac{7}{8}$ ही दोन गुणोत्तरे घेऊ. यापैकी कोणते गुणोत्तर मोठे हे ठरवावयाचे असेल तर हे दोन अपूर्णांक आहेत असे धरून गणित करता येते. म्हणून $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ आणि $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$ असे लिहिले तर $\frac{21}{24}$ हा मोठा, म्हणजेच $\frac{7}{8}$ हा अपूर्णांक मोठा असे ठरविता येते.

दोन राशींची तुलना करताना काळजी घ्यावी लागते. दोन राशी वेगवेगळ्या एककात मोजल्या असतील तर प्रथम त्या एकाच एककामध्ये लिहाव्या लागतात. उदाहरणार्थ 150 मिनिटे आणि 3 तास यातील मोठी राशी कोणती हे ठरविण्यासाठी प्रथम दोन्ही राशी एकाच एककात लिहावयास हव्यात. 3 तास म्हणजे 180 मिनिटे होतात. आता 150 मि. आणि 180 मि. यांची तुलना करता येते. उलट 150 मि. म्हणजे 2.5 तास होतात. आता 2.5 तास आणि 3 तास यांची तुलना करता येते.

शतमान

दोन गुणोत्तरांची तुलना करण्याचा प्रसंगही वारंवार येतो. अशी तुलना वेगवेगळ्या प्रकारांनी करता येते. पुढील उदाहरण पहा.

एका विद्यार्थ्याला भाषेमध्ये 100 पैकी 75 आणि विज्ञानात 150 पैकी 120 गुण मिळाले. या दोन्ही पैकी कोणत्या विषयात त्याला चांगले गुण मिळाले ? या प्रश्नाचे उत्तर मिळविण्यासाठी $\frac{75}{100}$ आणि $\frac{120}{150}$ या दोन गुणोत्तरांची तुलना करावयास हवी.

आता $\frac{75}{100} = \frac{225}{300}$ आणि $\frac{120}{150} = \frac{240}{300}$ तेव्हा $\frac{225}{300}$ आणि $\frac{240}{300}$ यात $\frac{240}{300}$ मोठे आहेत. म्हणजेच हा विद्यार्थी भाषेपेक्षा विज्ञानात चांगला आहे. या उदाहरणात आपण 300 हा दोन्ही अपूर्णांकांचा समान छेद घेतला आहे. तत्त्वत: कोणतीही संख्या समान छेद म्हणून घेता येते. प्रत्यक्षात मात्र 100 हा समान छेद घेतला जातो, आणि त्या गुणोत्तराला 'शतमान' किंवा 'शेकडेवारी' असे म्हणतात. उदाहरणार्थ, 100 पैकी 75 गुण म्हणजे 'शेकडा 75' किंवा '75 टक्के' गुण असे म्हणतात. तसेच $\frac{120}{150} = \frac{80}{100}$ म्हणून 150 पैकी 120 गुण म्हणजे 'शेकडा 80' किंवा '80 टक्के' गुण. व्यवहारात परीक्षेतील एखाद्या विद्यार्थ्याचे गुण, परीक्षेतील उत्तीर्ण विद्यार्थी, गावातील साक्षर किंवा निरक्षर लोक आणि इतर अनेक राशी शतमानामध्ये सांगितल्या जातात.

प्रमाण

'जेवढे जास्ती तेवढे चांगले' 'जास्ती लाभ, जास्ती हाव', 'पाण्यात जेवढे खोल जावे तेवढा त्याचा दाब वाढतो', 'हवेत जेवढे उंच जावे तेवढे तापमान कमी होते' अशी वाक्ये नेहमी म्हटली जातात. अशा वाक्यामध्ये दोन गोष्टींमधील संबंध दाखविलेला असतो. या दोनपैकी एक गोष्ट बदलली की दुसरीही तिच्याबरोबर बदलते. दोन्ही गोष्टीतील बदल एकतर एकाच रीतीने होतो किंवा परस्परांच्या विरुद्ध असतो. जसे पाण्याखालील खोली *वाढली* तर पाण्याचा दाब *वाढतो*. आणि खोली कमी झाली तर दाब कमी होतो. म्हणजे पाण्याखालील *खोली* आणि *दाब* या दोन्ही राशी एकदम वाढतात किंवा कमी होतात. उलट समुद्रसपाटीपासून हवेत *जास्ती उंच गेले* तर तेथील तापमान *कमी होते*. म्हणजे उंची आणि तापमान या राशीतील बदल परस्परांच्या विरुद्ध असतो.

आपण एक उदाहरण पाहू. यातील दोन राशी एकाच रीतीने बदलणाऱ्या घेऊ. एका पुस्तकाच्या प्रतींची संख्या आणि त्यांची किंमत पुढीलप्रमाणे आहे.

पुस्तकाच्या प्रती	किंमत (रु.)
10	200
20	400
50	1000

येथे प्रतींच्या संख्येबरोबर त्यांची किंमतही वाढते. जर आपण $\frac{10}{20}$, $\frac{200}{400}$ यांची तुलना केली तर $\frac{10}{20} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$ असे आढळून येते. त्याचप्रमाणे $\frac{10}{50} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$. प्रत्येक ठिकाणी प्रतींच्या संख्येचे गुणोत्तर आणि त्यांच्या किंमतींचे गुणोत्तर समान आहे असे आढळते. जर दोन गुणोत्तरे समान असतील तर त्यातील संख्या प्रमाणात आहेत असे म्हणतात. जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर a, b, c, d या संख्या प्रमाणात आहेत असे म्हणतात. मात्र प्रमाणातील संख्यांचा वरील क्रम बदलून चालत नाही. म्हणजे जर a, b, c, d प्रमाणात असतील तर a, d, b, c मात्र प्रमाणात नसतील. जर a, b, c, d या संख्या प्रमाणात आहेत असे दिले तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. a, b, c, d या चार संख्यांना प्रमाणाची पदे असे म्हणतात. प्रमाणाची तीन पदे ठाऊक असतील तर चौथे पद काढता येते. पुढील उदाहरण पहा.

एका पुस्तकाच्या तीन प्रतींना 75 रु. पडतात. तर 300 रुपयांना किती प्रती मिळतील ? प्रतींची संख्या x मानली तर.

$$\frac{3}{75} = \frac{x}{300}$$
$$x = \frac{3 \times 300}{75}$$
$$= 12.$$

दुसरे एक उदाहरण पहा. एक मोटार दर ताशी 50 किमी. वेगाने प्रवास करते. तिने चाललेले अंतर आणि त्याला लागलेला वेळ यांचे कोष्टक पुढीलप्रमाणे आहे.

वेळ (तास)	अंतर (किमी)
1	50
2	100
3	150
4	200

वरील दोन्ही उदाहरणांतील राशी म्हणजे पुस्तकांची संख्या व त्यांची किंमत, तसेच प्रवासाचा वेळ आणि चाललेले अंतर या एकाच रीतीने बदलणाऱ्या म्हणजे बरोबरच वाढणाऱ्या किंवा कमी होणाऱ्या आहेत. अशा राशी *समप्रमाणात* आहेत असे म्हणतात.

काही वेळा दोन संबंधित राशी परस्परांच्या विरुद्ध रीतीने बदलतात, म्हणजे एक राशी वाढत असेल तेव्हा दुसरी कमी होते किंवा याच्या उलट होते. पुढील उदाहरण पहा.

रु. 1000 मासिक हप्त्याने फेडावयाचे आहेत. सर्व रक्कम फेडावयास लागणारा काळ प्रत्येक हप्त्याच्या रकमेवर अवलंबून असतो. हप्त्याची रक्कम आणि काळ यांचे कोष्टक असे आहे.

रक्कम (रुपये)	काळ (महिने)
100	10
200	5
250	4
500	2

येथे हप्त्याची रक्कम वाढली तर रक्कम फेडावयाचा काळ कमी होतो. येथे हप्त्याच्या रकमेचे गुणोत्तर आणि महिन्यांचे गुणोत्तर ही एकमेकांची गुणाकार व्यस्ते आहेत. जसे

$\frac{100}{200} = \frac{1}{2}$ आणि $\frac{10}{5} = \frac{2}{1}$; $\frac{2}{1}$ हे $\frac{1}{2}$ चे गुणाकार व्यस्त आहे. तसेच $\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$ आणि $\frac{5}{2}$ हे त्याचे गुणाकार व्यस्त आहे.

या ठिकाणी 100, 200, 10, 5 या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

परंपरित प्रमाण

प्रमाणाचा आणखी एक प्रकार आहे. त्यामध्ये चार पदांऐवजी तीन पदे असतात. या प्रमाणात मधले पद दोन्ही गुणोत्तरांमध्ये येते. जसे

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore ac = b^2$$

$$\therefore b = \sqrt{ac}$$

म्हणजे मधले पद हे पहिल्या आणि तिसऱ्या पदांच्या गुणाकाराचे वर्गमूळ असते. या पदाला इतर दोन पदांचा *'भूमिती मध्य'* (Geometric Mean) म्हणतात. विज्ञान आणि गणिताच्या अनेक विषयात भूमितीमध्याचा सांख्यिकी सरासरी (Statistical Average) म्हणून उपयोग करतात. परंपरित प्रमाणामध्ये तिनापेक्षा अधिक पदेही येऊ शकतात. जसे

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$$

हे परंपरित प्रमाणाचे उदाहरण आहे. यातील a, b, c, d, e या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

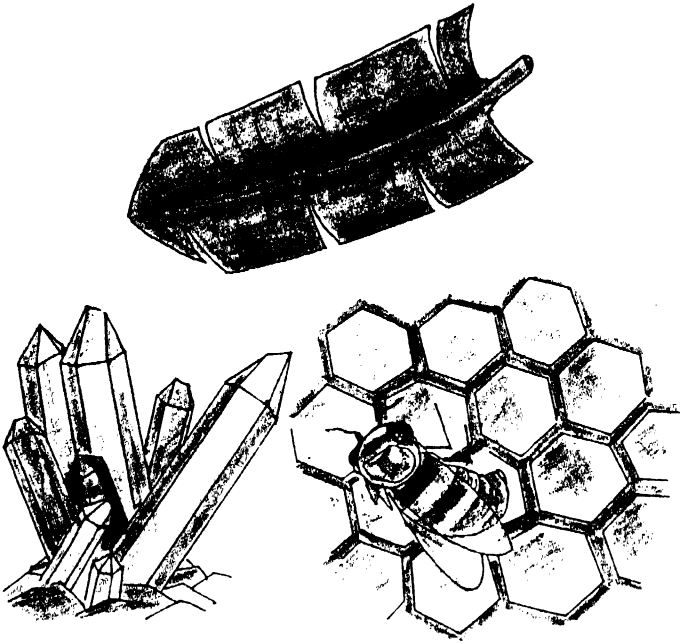
5

आकार आणि आकारमान

राधानाथ शिखधर हा भारतीय सर्वेक्षण खात्यात (Survey of India) काम करणारा एक सर्वेक्षक होता. आपल्या दार्जिलिंग येथील कार्यालयात तो काम करीत होता. एके दिवशी त्याने एका दूरच्या सर्वात उंच दिसणाऱ्या शिखराची उंची मोजण्याचे ठरविले. त्या शिखराला PK – 15 असे म्हणत असत. त्याचा मुख्य तळ होता त्या ठिकाणची समुद्रसपाटीपासून उंची त्याने आधीच मोजली होती. त्या तळापासून त्याने त्या शिखराची मापे घेतली आणि गणित करून शिखराची उंची काढली. ती पाहून त्याचा आपल्या डोळ्यांवर त्याचा विश्वास बसेना. तो आश्चर्याने चकित झाला. त्या शिखराची उंची समुद्रसपाटीपासून 29002 फूट (8,700.6 मीटर) होती. ते जगातील सर्वात उंच शिखर होते. त्याला पुढे माऊंट एव्हरेस्ट असे नाव देण्यात आले. सर्वात उंच शिखर शोधणारा राधानाथ शिखधर हा पहिला माणूस होता. त्या शिखरावर न चढता त्याने त्याची उंची कशी काढली ? ही काही जादू नव्हती. त्याच्या भूमितीच्या ज्ञानाच्या बळावर त्याने ही कामगिरी केली होती. असे प्रश्न सोडविण्यासाठी आपल्याला भूमितीचा कसा उपयोग होतो हे आपण पाहू.

'भूमिती' (Geometry) या शब्दाचा अर्थ 'भूमीचे मापन' असा आहे. इंग्रजीत Geo म्हणजे भूमी, metry म्हणजे मापन, परंतु भूमितीची खरी सुरुवात मात्र निसर्गातील विविध आकारांच्या अभ्यासाने झालेली आहे. निसर्गातील काही सुंदर वस्तू पहा (आकृती 23).

प्रत्येक वस्तूचा एक विशिष्ट आकार आहे. उदाहरणार्थ, केळीच्या पानावर आपल्याला समांतर रेषा आणि त्यांनी केलेले कोन दिसतात. मधमाशीच्या पोळ्यामध्ये सारख्या आकाराचे षट्कोन दिसतात. गारगोटीच्या स्फटिकामध्ये सहा बाजूंची सुंदर घनाकृती दिसते. या प्रत्येक वस्तूमध्ये तिच्या भागांची विशिष्ट रचना झालेली दिसते. अशा रचनेला 'आकृतिबंध' (Pattern) म्हणतात. प्रत्येक वस्तूमध्ये निराळा आकृतिबंध दिसून येतो. यातील मौजेची गोष्ट अशी की हे वेगवेगळे आकृतिबंध आपण सहज ओळखू शकतो, ते लक्षात ठेवू शकतो,

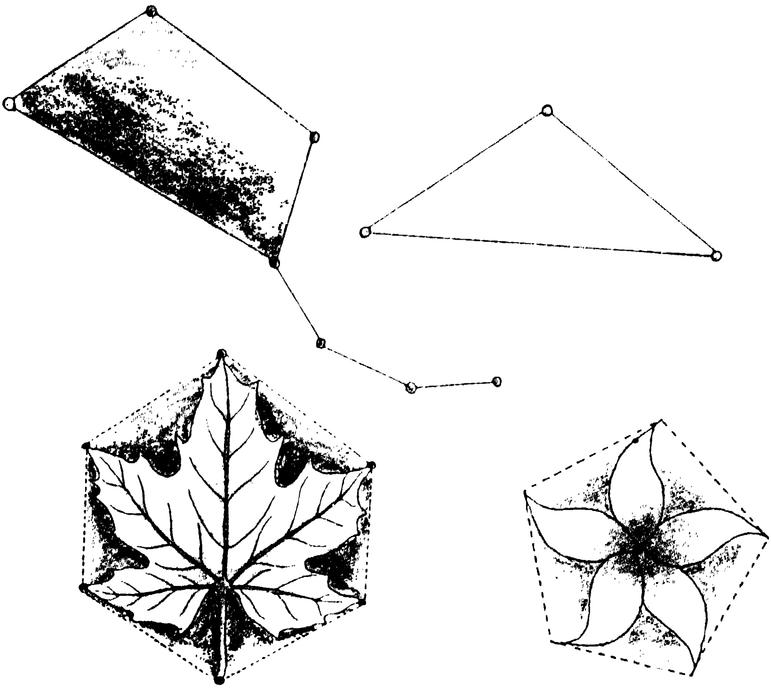


आकृती 23

त्यांच्यामधील फरक समजू शकतो आणि इतर ठिकाणी हे आकृतिबंध आले तर ते कोणते हेही ओळखू शकतो.

निसर्गाशी मानवाचा जो संबंध आला त्यातूनच भूमितीचा विकास होत गेला. रात्रीच्या वेळी आकाशात दिसणाऱ्या ताऱ्यांपासून बिंदूची कल्पना उगम पावली. निरनिराळ्या तारकापुंजांपासून कोनाची कल्पना सुचली. पानांच्या झरोक्यांमधून येणाऱ्या कवडशांवरून सरळ रेषांची कल्पना निर्माण झाली. तर निरनिराळ्या पानांच्या आकारांवरून वक्र रेषांची कल्पना सुचली.

पाने, फुले, इ. वस्तूंमध्ये दिसणाऱ्या विविध प्रकारच्या आकृतिबंधांवरून बिंदू, रेषा, कोन, वर्तुळ इत्यादी भूमितीमधील मूलभूत आकारांची कल्पना निर्माण झाली (आकृती 24). भूमितीमधील त्रिकोण, चौकोन षट्कोन इत्यादी आकार या मूलभूत आकारांपासूनच तयार झालेले असतात. या आकारांची त्रिकोण, चतुष्कोन, पंचकोन इ. नावे हेच दर्शवितात.



आकृती 24

भूमिती : एक उपयुक्त साधन

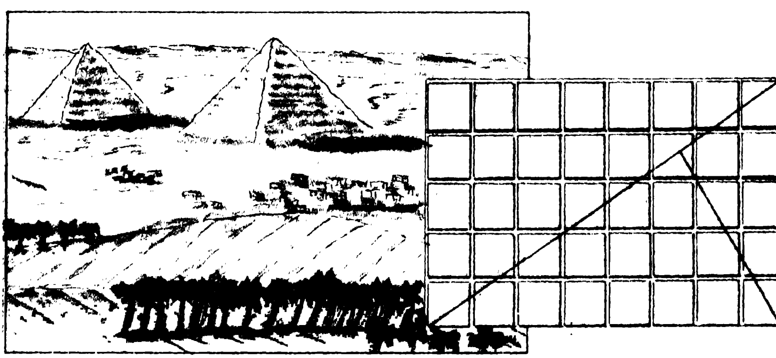
भूमितीची सुरुवात प्राचीन प्रागैतिहासिक काळापासून झालेली आहे. एखाद्या ठिकाणची लोकवस्ती वाढू लागल्यावर केवळ नैसर्गिक गुहांसारख्या जागा राहाण्यासाठी अपुऱ्या पडू लागल्या. त्यामुळे एखादे कुटूंब राहू शकेल, वारा, ऊन, पाऊस यांच्यापासून रक्षण करू शकेल असा निवारा बांधणे ही माणसाची गरज बनली. योग्य असा निवारा बांधताना घरातील सर्वात उंच व्यक्तीला तेथे नीट वावरता यावे म्हणून लांबी, रुंदी, उंची यांची मापे घेणे जरुरीचे ठरले.

प्राचीन बॅबिलोनियन लोकांनी भूमितीला सुरुवात केली. जेथे बॅबिलोनियन लोक रहात होते तो प्रदेश तैग्रीस आणि युफ्राटिस या दोन नद्यांच्या मध्ये होता. हा सर्व प्रदेश प्रथम दलदलीचा होता. दलदलीतील पाण्याचा निचरा करण्यासाठी आणि पुराच्या पाण्याला वाव देण्यासाठी त्या प्रदेशात कालवे बांधण्यात आले. कालवे बांधण्यासाठी तेथील जमिनीची पहाणी आणि मोजणी करावी लागली. त्यासाठी

बॅबिलोनियन लोकांनी क्षेत्रफळ मोजण्याचे नियम तयार केले. ते फारसे अचूक नसले तरी कालवे बांधण्यासाठी उपयोगी होते.

इजिप्तमध्ये नाईल नदीच्या काठावरील शेतकरी आपल्या शेतीच्या प्रमाणात कर भरत असत. पावसाळ्यात नदीला पूर येऊन पाणी सर्व जमिनीवर पसरून जमीन मोजणीच्या खुणा नष्ट होत असत. त्यामुळे शेतकऱ्यांना योग्य कर भरता यावा म्हणून पुन्हा जमीन मोजणी करावी लागे. पावसाळा संपला आणि पूर ओसरला की प्रशिक्षित अधिकारी जमीन मोजण्यासाठी येत, त्यांचे मदतनीस मापणी करण्याची दोरी घेऊन येत आणि जमिनीच्या नव्या खुणा तयार करत. त्यांच्या जवळ असलेल्या दोरीला ठराविक अंतरांवर गाठी मारलेल्या असत. त्या गाठींच्या साह्याने ते जमिनीची मोजणी करत आणि जमिनीचे त्रिकोणी, चौकोनी किंवा समलंब चौकोनी आकाराचे भाग करत. त्यावरून क्षेत्रफळ मोजण्याचे नियमही त्यांनी तयार केले होते. मात्र ते फारसे अचूक नव्हते.

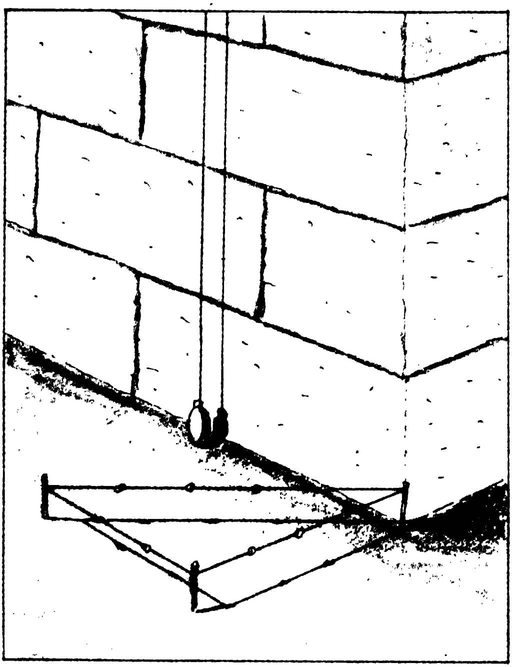
मानवी संस्कृतीचा विकास होत गेला तसा निरनिराळ्या भौमितिक आकृतींच्या गुणधर्मांचा अभ्यास गणितज्ञांनी सुरू केला. यात लक्षात घेण्यासारखी गोष्ट अशी की प्राचीन बॅबिलोनिया (आताचा इराक), इजिप्त, हिंदुस्थान आणि चीन हे देश एकमेकांपेक्षा खूप दूर असूनही त्यांनी केलेला भूमितीचा विकास जवळ जवळ सारखाच होता. या देशातील लोक बांधकामात प्रवीण होते आणि लंबरेषा, चौरस



आकृती 25

आणि इतर आकृती काढण्यासाठी ते काटकोन त्रिकोणाच्या गुणधर्मांचा उपयोग करीत असत. त्रिकोणाच्या बाजू 3,4, व 5 एकक लांबीच्या घेतल्या तर त्याच्या लहान बाजू काटकोन (90 अंश) तयार करतात हे प्राचीन बॅबिलोनियन आणि इजिप्शियन लोकांना ठाऊक होते. अंतर मोजण्यासाठी ते सारख्या अंतरावर गाठी

मारलेल्या दोऱ्या वापरत. अशा दोऱ्या घेऊन त्रिकोणाच्या 3,4,5 लांबीच्या बाजू मोजून ते काटकोन त्रिकोण तयार करत असत (आकृती 26 a). अशा साध्याच साधनांचा उपयोग करून त्यांनी पिरॅमिड आणि इतर मोठमोठे राजवाडे आश्चर्यजनक अचूकतेने बांधले. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची या सूत्राने मिळते हे आता आपल्याला ठाऊक आहे. इजिप्शियन लोक मात्र हे सूत्र $\frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ दुसरी

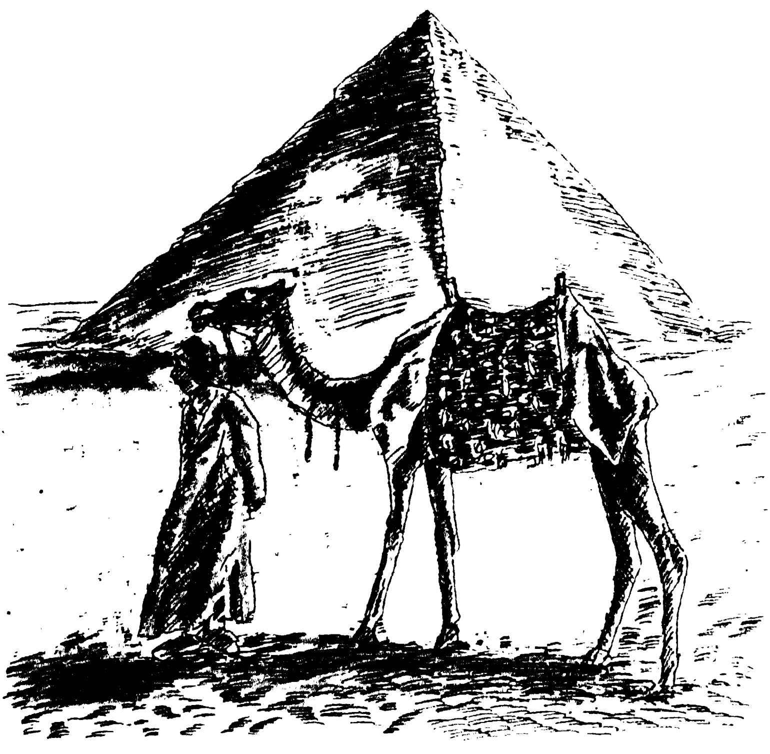


आकृती 26 a

बाजू असे वापरत असत. त्यांच्या भूमापनातील त्रिकोण खूप मोठे आणि अरुंद असल्यामुळे उंची आणि बाजू यात फारसा फरक नसे. त्यामुळे त्यांनी काढलेली क्षेत्रफळे कर आकारणीच्या कामासाठी पुरेशी अचूक येत असत. इ.स. पूर्व 2500 सालात बांधलेल्या पिरॅमिडचा पाया चौरसाकृती असून, त्याच्या चार बाजू सुमारे 230 मीटर लांबीच्या असूनही अगदी अचूक मोजलेल्या आहेत. इतक्या प्रचंड आकाराच्या चौरसाच्या बाजू आणि कोन अगदी अचूक मोजणे ही बांधकामातील आश्चर्यजनक करामतच म्हटली पाहिजे.

हिंदु गणितज्ञांच्या हातात मात्र भूमितीच्या अभ्यासाला वेगळे वळण मिळाले. रोजच्या व्यवहारातील अनेक प्रश्न सोडविण्यासाठी आणि खगोलशास्त्राचा अभ्यास करण्यासाठी ते भूमितीचा उपयोग करीत असत. क्षेत्रफळ आणि घनफळाची गणिते करण्यासाठी ते भूमितीमध्ये संख्यांचा आणि बीजगणिताचा सर्रास उपयोग करत. प्राचीन हिंदू लोक निरनिराळ्या विषयांतील तत्त्वे श्लोकबद्ध सूत्रांच्या साहाय्याने सांगत असत आणि ती पाठ करत असत. त्यामुळे लिखित ग्रंथ हिंदुस्थानात जरा उशीरा निर्माण झाले. भूमितीवरील पहिला ग्रंथ इ.स. पूर्व ८०० साली लिहिला गेला. त्याचे नाव 'शुल्ब सूत्रे' असे होते. ग्रीकांच्या भूमितीला सुरुवात होण्यापूर्वी कितीतरी आधीची ही घटना आहे.

हिंदुस्थानात पायथागोरसच्या पुष्कळ आधीपासून पायथागोरसचा सिद्धांत 'बौद्धायन सिद्धांत' म्हणून प्रसिद्ध होता. बौद्धायन हा प्रसिद्ध हिंदू गणिती होता.



आकृती 26b

त्याने यज्ञासाठी लागणाऱ्या वेदी बांधण्यासाठी भूमितीचे नियम सांगितले. प्राचीन भारतामध्ये यज्ञ करणे हा वैदिक धर्मातील महत्त्वाचा भाग होता. वेगवेगळ्या यज्ञांसाठी निरनिराळ्या आकारांच्या वेदी लागत आणि त्यांचे आकार अगदी अचूक मापाचे करावे लागत. त्यासाठी भूमितीचे ज्ञान आवश्यक असे.



आकृती 27

प्राचीन संस्कृतीमधील लोकांना सूर्य, चंद्र आणि तारे यांच्या गतीमधील नियमितपणा लक्षात आलेला होता. त्यांनी सूर्य चंद्राच्या गतीवरून कालमापन करावयास सुरुवात केली तसेच कॅलेंडरही तयार केले. ताऱ्यांच्या अभ्यासावरून प्रत्येक नक्षत्राला पुन्हा पूर्वेला उगविण्यास 360 दिवस लागतात हे त्यांना समजले होते. या वर्तुळाकार अंतराचे त्यांनी 360 भाग पाडले. प्रत्येक भागाला एक अंश अशी संज्ञा दिली. अशा रीतीने कोनाचे माप तयार झाले. प्रत्येक अंशाचे 60 भाग पाडतात. त्या प्रत्येक भागाला मिनिट म्हणतात. प्रत्येक मिनिटाचे 60 भाग पडतात. त्यातील प्रत्येक भागाला सेकंद म्हणतात. 60 भागांचे प्रमाण ही प्राचीन बॅबिलोनियन लोकांची देणगी आहे. त्यांची संख्यामापनाची रीत 60 या पायावर आधारलेली होती.

ग्रह, तारे व नक्षत्रे यांच्या आकाशातील स्थितीचे ज्ञान प्राचीन लोकांना त्यांच्या दैनंदिन व्यवहाराचे नियमन करण्यासाठी उपयोगी पडत असे. तसेच अनेक सण-समारंभ आणि धार्मिक विधी निश्चित करण्यासाठीही या ज्ञानाची आवश्यकता असे. उदाहरणार्थ, यज्ञप्रसंगी दिशा निश्चित करताना प्रथम पूर्व दिशा ठरवावी लागे. शुल्बसूत्रामध्ये, ''चित्रा आणि स्वाती ही नक्षत्रे आकाशात एक युग (169.4 सेमी) उंचीवर असताना या नक्षत्रांच्या मध्यभागी पूर्व दिशा असते'' असे सांगितले आहे. यापेक्षाही महत्त्वाची गोष्ट ही की ग्रह ताऱ्यांच्या अभ्यासाने भूमितीच्या अभ्यासाला मोठी चालना मिळाली.

भूमिती : एक शास्त्र

प्राचीन ग्रीक लोक इजिप्शियन सर्वेक्षकांना 'भूमापक' (Geometers) म्हणजे 'जमिनीची मोजणी करणारे' असे म्हणत. (ग्रीक भाषेत Geo म्हणजे पृथ्वी आणि meteria म्हणजे मापन) प्राचीन भूमिती तज्ज्ञांनी त्रिकोण, चौरस, आयत आणि वर्तुळ या आकृतींचे अनेक गुणधर्म शोधून काढले. या गुणधर्मांच्या अभ्यासाची एक ज्ञानाशाखा तयार झाली. ग्रीक गणिती या ज्ञानशाखेला 'भूमिती' असे म्हणू लागले. त्यांनी भूमितीच्या क्षेत्रात महत्त्वाची प्रगती केली. त्यांनी इजिप्शियन लोकांचे चुकीचे नियम तर सुधारलेच पण, निरनिराळ्या आकृतींचा अभ्यास करून त्यांच्या गुणधर्मांतील परस्परसंबंध शोधून काढले. थेल्स हा ग्रीक गणिती (आकृती 27) 2500 वर्षांपूर्वी होऊन गेला. वर्तुळाचा कोणताही व्यास त्याचे दोन सारखे भाग करतो, तसेच कोणत्याही दोन सरळ रेषा छेदत असतील तर होणारे विरुद्ध कोन समान मापाचे असतात, हे गुणधर्म त्याने प्रथम शोधून काढले. थेल्सच्या कामगिरीमुळे भूमितीचा अभ्यास क्षेत्रमापनापुरता मर्यादित न राहता भूमिती हे विविध आकृतींच्या गुणधर्मांचा आणि त्यांच्या परस्परसंबंधांचा अभ्यास करण्याचे शास्त्र असे व्यापक स्वरूप त्याला प्राप्त झाले. थेल्सच्या नंतर होऊन गेलेल्या पायथागोरस सारख्या गणितज्ञांनी भूमितीचे अनेक सिद्धांत शोधून काढले.


आकृती 28

इ.स. पूर्व चौथ्या शतकापर्यंत भूमितीच्या ज्ञानात बरीच भर पडली होती. परंतु ते सर्व विस्कळित स्वरूपात होते. तोपर्यंत लिहिले गेलेले सर्व सिद्धांत एकत्र करून त्यांना सुसंगत तर्कशास्त्रीय स्वरूप देण्याचे महत्कार्य युक्लिड (आकृती 28) या विद्वान ग्रीक गणितज्ञाने केले. सुमारे इ.स. पूर्व 300 साली इजिप्तमधील अलेक्झांड्रिया शहरातील संग्रहालयात युक्लिड गणित आणि इतर विषय शिकवत असे. त्याने 'भूमितीची मूलतत्त्वे' (Elements of Geometry) या

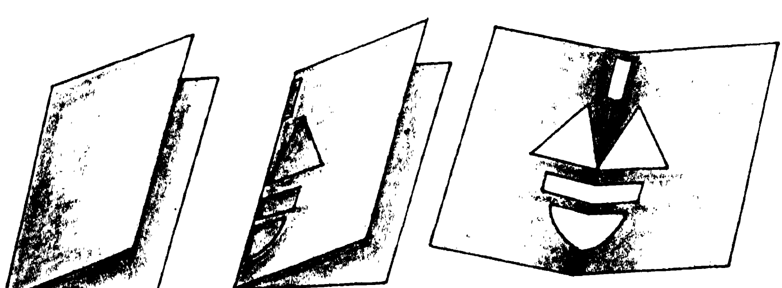
नावाचा ग्रंथ लिहिला. त्याच्या काळापर्यंत मांडले गेलेले भूमितीचे सर्व सिद्धांत त्याने या ग्रंथात समाविष्ट केलेले होते. विविध गुणधर्मांच्या सिद्धतेसाठी संज्ञा, व्याख्या, गृहीतके आणि प्रमेय अशी तर्कबद्ध मांडणी करून त्याने सर्व प्रमेयांच्या सिद्धता करून दाखविल्या. यामुळे भूमितीच्या अभ्यासाला तर सुसंबध्द असे वळण लागलेच परंतु या पद्धतीने इतर विषयांचाही विकास करणे शक्य झाले. युक्लिडने घालून दिलेली पद्धत आजही वापरली जात आहे.

एकरूपता आणि समरूपता

भूमितीच्या सर्व तत्त्वांमध्ये एकरूपता आणि समरूपता ही तत्त्वे अतिशय महत्त्वाची आहेत. आपल्या बहुतेक सर्व व्यवहारांच्या मुळाशी याच तत्त्वांचा आधार असतो. कसा ते पाहू.

एकरूपता

एक कागद घ्या. त्याला एक घडी घाला, घडी तशीच ठेवून कागदावर कात्रीने कोणतीही एक आकृती कापून काढा. आता तंतोतंत जुळणाऱ्या दोन आकृती मिळतील. ज्या आकृती एकमेकींवर ठेवल्या तर तंतोतंत जुळतात त्यांना एकरूप आकृती म्हणतात (आकृती 29). पत्त्यांचा जोड घ्या. त्यातील सर्व पत्ते एकरूप असतात. ते एकावर एक ठेवले की तंतोतंत जुळतात. परंतु दोन आकृती एकरूप आहेत का हे पाहण्यासाठी नेहमी त्या एकमेकींशी जुळविल्या पाहिजेत असे नाही. एकरूपता ठरविण्यासाठी प्रथम दोन आकृतींची एकास-एक संगती ठरविली आणि नंतर त्यांच्या संगत घटकांची मापे घेतली तरी चालते. त्रिकोणांच्या बाबतीत दोन त्रिकोणांच्या संगत बाजूंची आणि संगत कोनांची मापे समान असली तर ते त्रिकोण एकरूप असतात. म्हणजेच 'दोन त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूच्या दिलेल्या संगतीला जर



आकृती 29

त्यांच्या संगत बाजू आणि संगत कोन एकरूप असतील तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.' 'दोन बाजू समान लांबीच्या असल्या तर त्या एकरूप असतात आणि दोन कोनांची मापे समान असतील तर ते एकरूप असतात.' या दोन व्याख्यांवरून त्रिकोणांची एकरूपता ठरविता येते.

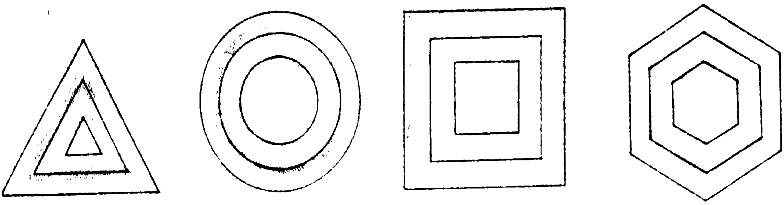
त्रिकोणांची एकरूपता ठरविताना तीन बाजू आणि तीन कोन असे सहा घटक तपासणे जरुरीचे असले तरी प्रत्यक्षात त्यातील फक्त तीनच घटक तपासले तरी पुरते. मात्र या तीन घटकांमध्ये एकतरी बाजू असावयास हवी. आणि जर त्यात एकच कोन असला तर तो कोन समाविष्ट करणाऱ्या बाजू एकरूप असावयास हव्यात. चौकोनांची एकरूपता ठरविण्यासाठी एकूण पाच घटक पहावे लागतात, $(2 \times 4 - 3)$ तर पंचकोनांसाठी 7, $(2 \times 5 - 3)$, घटक पहावे लागतात. याप्रमाणे सामान्यपणे n बाजूंच्या आकृतींची एकरूपता तपासताना $(2n - 3)$ इतके घटक तपासावे लागतात. ज्यांची त्रिज्या समान आहे अशी सर्व वर्तुळे एकरूप असतात, तर ज्यांची बाजू समान आहे असे सर्व चौरसही एकरूप असतात.

'आपल्या जीवनात एकरूपतेला खरोखर काही महत्त्व आहे का ?' या प्रश्नाचे उत्तर 'होय, निश्चितच आहे' असे आहे. खरोखर आपले बहुतेक व्यवहार एकरूपतेच्या तत्त्वावर चालत असतात. आपण रोजच्या रोज रेडिओ, टी.व्ही., मोटार, घड्याळे, इ. अनेक वस्तू वापरत असतो. या वस्तू तयार करताना एकरूपतेचाच उपयोग केलेला असतो. उदाहरणार्थ, घड्याळाचे निरनिराळे भाग वेगवेगळ्या प्रकारच्या साच्यांमध्ये तयार करतात. प्रत्येक साच्यामधून तयार झालेले सर्व भाग एकसारखे, म्हणजेच एकरूप असतात. एखाद्या यंत्राचा एक भाग बिघडला तर त्याच्या जागी दुसरा भाग बसविता येतो, कारण ते सर्व एकरूप असतात अशी आपली खात्री असते. पुस्तकाची सर्व पाने एकरूप असतात. म्हणूनच ती नीट लावून पुस्तक बांधता येते. लांबी मोजावयाची असेल तर आपण कोणतीही पट्टी त्यासाठी वापरतो. कारण सर्व पट्ट्या सारख्याच बनविलेल्या असतात हे आपल्याला ठाऊक असते.

समरूपता

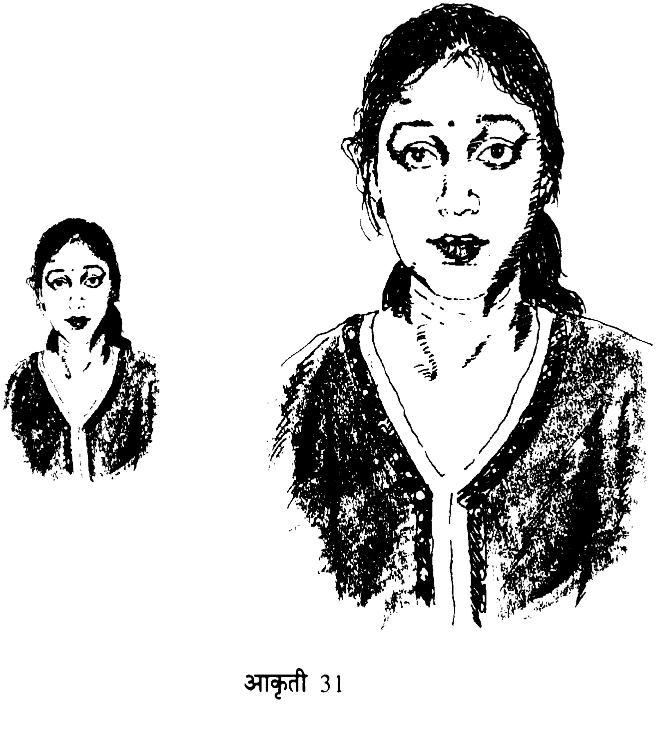
सोबत दिलेल्या आकृती पहा (आकृती 30). त्यातील त्रिकोण समभुज आहेत, सर्व चौकोन चौरस आहेत आणि षट्कोनही समभुज आहेत. त्यांचे संगत कोन एकरूप आहेत. बाजू समांतर आहेत, पण एकरूप नाहीत. अशा प्रकारच्या आकृती सारख्याच दिसतात. त्यांना 'समरूप' आकृती म्हणतात. दोन आकृती समरूप असण्यासाठी दोन अटी आवश्यक असतात. एक म्हणजे त्यांचे संगत कोन

एकरूप असले पाहिजेत आणि दुसरी म्हणजे त्यांच्या संगत बाजूंची गुणोत्तरे समान असली पाहिजेत. सर्व वर्तुळे मात्र नेहमी समरूप असतात.



आकृती 30

आकृती 31 मधील व्यक्तिचित्र पहा. येथे एकाच व्यक्तीची दोन चित्रे आहेत. मात्र ती लहान-मोठी आहेत. एका चित्रातील प्रत्येक बिंदूला दुसऱ्या चित्रात एक संगत बिंदू आहे मात्र एका आकृतीमधील दोन बिंदू आणि दुसऱ्या आकृतीमधील त्यांचे संगत बिंदू यातील अंतरे समान नाहीत. लहान आकृतीमधील ही अंतरे सर्वत्र सारख्याच प्रमाणात कमी केलेली आहेत. थोडक्यात ही दोन चित्रे समरूप आहेत.



आकृती 31

निसर्गातही समरूप आकृतींची अनेक उदाहरणे आढळतात. याचे सर्वात उत्तम उदाहरण म्हणजे स्फटिक ! स्फटिकमय पदार्थांचे अनेक स्फटिक लहान मोठे असले तरी अगदी सारख्या आकाराचे म्हणजेच समरूप असतात. एखादा स्फटिक फुटून त्याचे तुकडे झाले तर ते सर्व तुकडेही समरूप असतात. साबणाचे फुगे, एकाच झाडाची लहानमोठी फुले, मधाच्या पोळ्यातील षट्कोन आणि फुलपाखरांच्या पंखांवरील नक्षी ही निसर्गातील समरूप आकृतींची नेहमी आढळणारी उदाहरणे आहेत.

साबणाचे फुगे नेहमी गोलाकार का असतात ? पाण्याचे थेंबही गोलाकारच का असतात ? याचा भूमितीशी काही संबंध आहे का ? याचा खरोखरच भूमितीशी संबंध आहे. या दोन्ही बाबतीत निसर्ग असा आकार धारण करतो की ज्याचे पृष्ठफळ सर्वात कमी असेल आणि त्यामुळे पृष्ठीय ऊर्जाही किमान असेल. घनाकृतीच्या बाबतीत गोल हा आकार असा आहे की दिलेल्या घनफळाच्या वस्तूमध्ये गोलाचे पृष्ठफळ इतर कोणत्याही आकारापेक्षा कमी असते. म्हणूनच साबणाचा फुगा किंवा कोणत्याही द्रवाचे थेंब गोलाकार असतात. याच कारणामुळे सर्व ग्रहसुद्धा गोलाकार आहेत.

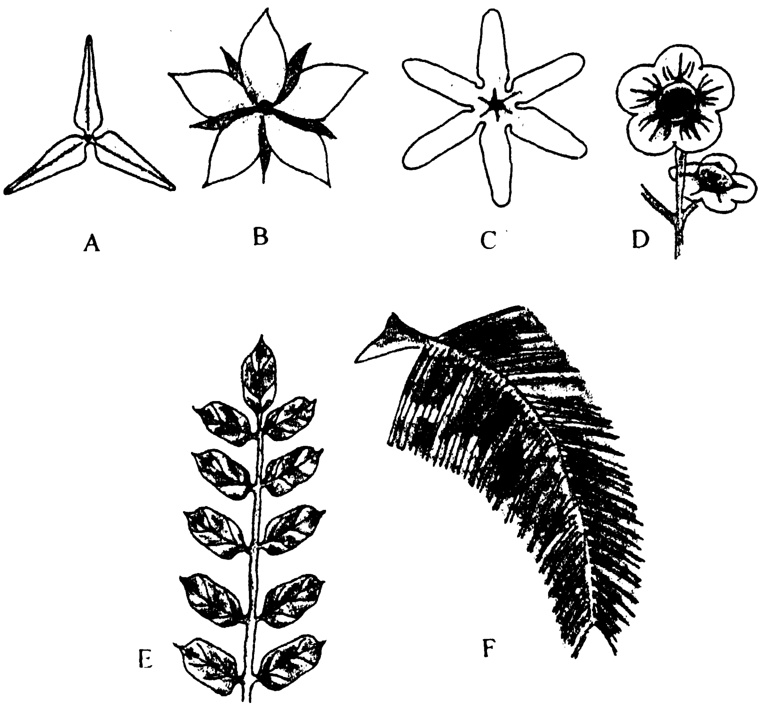
सममिती (Symmetry)

जीवनात सममितीचा काय उपयोग आहे ? वास्तविक हा प्रश्न उलट प्रकारे 'सममिती शिवाय जीवन शक्य आहे का ?' असा विचारावयास हवा. आपण या प्रश्नाचा जरा सविस्तर विचार करू.

आकृती 32 पहा. या आकृतीमध्ये निरनिराळी पाने व फुले दाखविली आहेत. त्रिकोण, चौरस, पंचकोन, षट्कोन, वर्तुळ इ. आकृती आपल्या परिचयाच्या असतात. खरे म्हणजे निसर्गातूनच या आकृती आपल्याला सुचलेल्या आहेत. या सर्व आकारांमध्ये सममिती असल्याचे आपल्याला आढळून येते. सममिती म्हणजे एका रेषेच्या किंवा बिंदूच्या संदर्भात असलेली आकृतीच्या घटकांची एकरूपता होय !

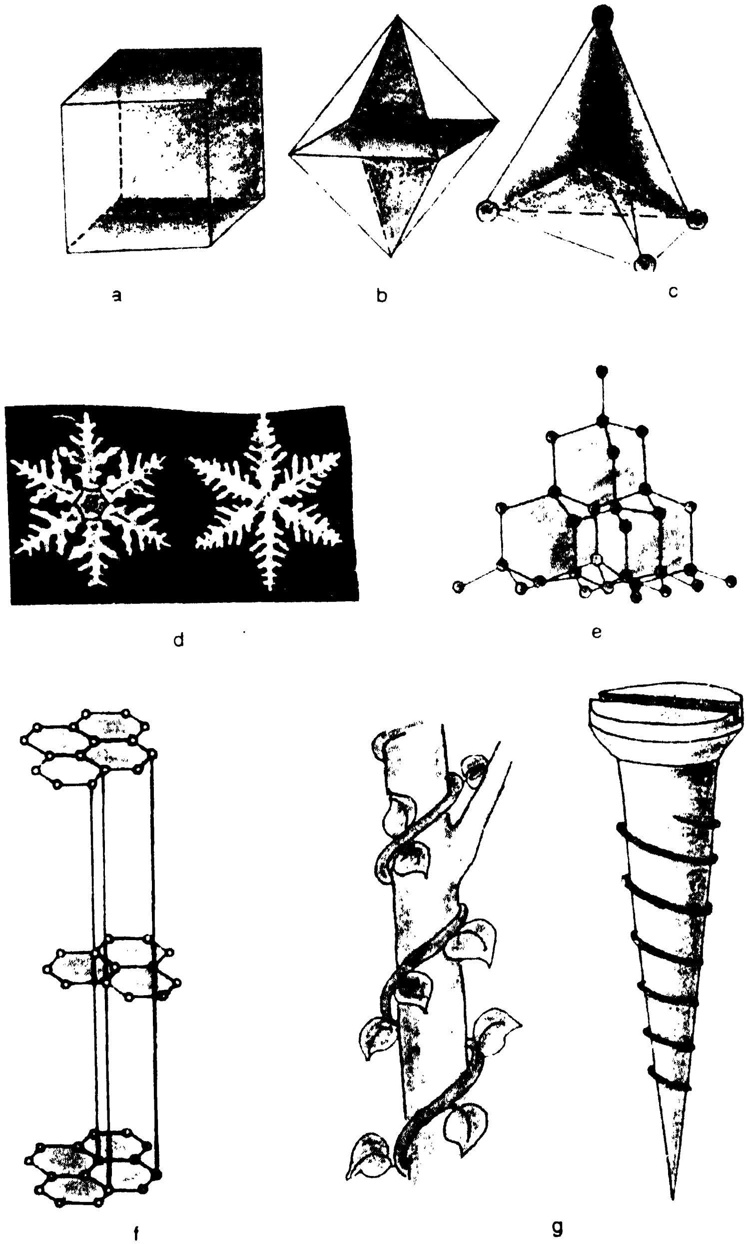
आकृती 32a पहा. ही आकृती तिच्या उभ्या पानाच्या मध्यातून जाणाऱ्या रेषेच्या संदर्भात सममित आहे. जर ही आकृती आपण 120° च्या कोनातून फिरविली तरी आकृती तशीच रहाते. म्हणजेच या आकृतीला अक्षाभोवती आणि एका केंद्राभोवती भ्रमणाची अशी दुहेरी सममिती आहे. आकृती 32e आणि 32f या सोडून इतर सर्व आकृतींना वरील प्रमाणे अक्षीय आणि भ्रमणाची अशी दुहेरी सममिती आहे.

निसर्गातील इतरही अनेक वस्तूंमध्ये सममिती आढळून येते. मिठाच्या स्फटिक घनाकृती असतो. (आकृती 33a). घनाकृती वस्तूला सममितीचे अनेक अक्ष असतात. गंधकाचे समचतुर्भुजाकृती स्फटिक असतात. तेही सममित स्फटिक असतात. (आकृती 33b).



आकृती 32

त्रिकोण सूची (Tetrahedron) (आकृती 33c) हाही निसर्गात मोठ्या प्रमाणात आढळून येणारा सममित आकार आहे. हिरा हे सर्वात मौल्यवान रत्न आहे. हिरा हा कार्बनच्या अणूंनी बनलेला असतो. हे अणू त्रिकोण सूचीच्या चार टोकांवर असतात. अशा अनेक सूचींचे जाल (Network) तयार होऊन हिरा बनतो (आकृती 33e). गारगोटीच्या (Quartz) स्फटिकातही त्रिकोणसूचींचे जाल तयार झालेले असते.



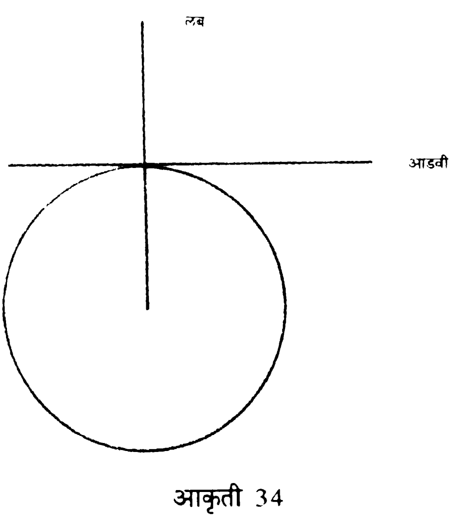
आकृती 33

षट्कोन हाही निसर्गात नेहमी आढळणारा सममित आकार आहे. हिऱ्यामधील त्रिकोण सूचींच्या जालामुळे हिरा हा सर्वात कठिण बनलेला आहे. तर ग्राफाइटमधील कार्बन अणूंच्या सपाट षट्कोनी जालामुळे ग्राफाइट हा अतिशय मऊ पदार्थ बनला आहे. त्यामुळे ग्राफाइट हे यंत्रांमध्ये घालण्याचे उत्कृष्ट वंगण आहे. मधाच्या पोळ्यातील घरांचा षट्कोनी आकार पोळ्याची जागा पूर्णपणे व्यापून टाकण्यास उत्तम उपयोगी पडतो.

सर्पिलाकृती (Helix) हा निसर्गाचा एक अतिशय आवडता आकार आहे असे दिसते. हा आकार मात्र सममित नसतो. एका दण्डगोलाभोवती गुंडाळत वर जाणाऱ्या रेषेमुळे सर्पिलाकृती तयार होते. सर्पिलाकृतीचे अगदी परिचित उदाहरण म्हणजे स्क्रू! दुसरे उदाहरण म्हणजे झाडावर चढत जाणारी वेल. वेलांना येणारे तणावे हे सुद्धा सर्पिलाकृतीचेच उदाहरण होय (आकृती 33g). सजीवांच्या पेशींमध्ये डी.एन.ए. चे रेणू असतात. साखरेचा रेणू, फॉस्फेटचा रेणू आणि नायट्रोजन संयुगाचा रेणू यांच्यापासून बनलेल्या न्यूक्लिओटाइडची दुहेरी मालिका म्हणजे डी.एन.ए. चा रेणू असतो. त्यातील प्रत्येक न्यूक्लिओटाइड मालिका सर्पिलाकृतीच्या आकाराची असते.

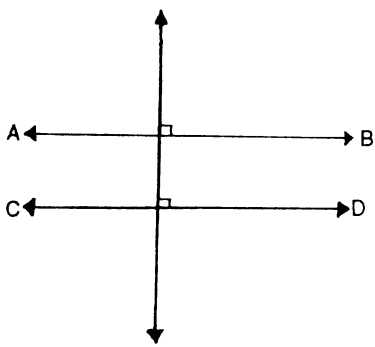
घरातील भूमिती

आपले जीवन चौकोन आणि वर्तुळांनी व्यापलेले आहे असे म्हणावयास हरकत नाही. आपल्या घरातील वस्तू पहा. पुस्तके, टेबल, कपाटे, दारे, भिंती, जमिनी आणि छते, तसेच कप बश्या, ताटल्या आणि इतर अनेक वस्तू चौकोनी किंवा वर्तुळाकार असतात. सुताराला कामाला बोलाविले तर तो पट्टी आणि काटकोनी गुण्ये घेऊन येतो. गवंडी बोलावला तर तो त्याचा ओळंबा आणि स्पिरिट लेव्हल घेऊन येतो. या लोकांना गुण्या किंवा ओळंबा कशासाठी लागतो? याचे



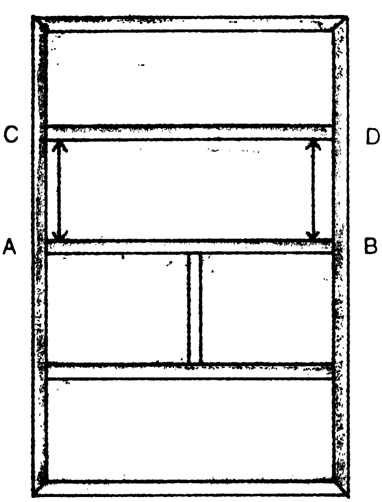
आकृती 34

कारण साधे आहे. पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणामुळे आणि पृथ्वीच्या गोल आकारामुळे आपल्यावर एक बंधन येते. ते असे की आपल्याला बहुतेक ठिकाणी जमिनीला समांतर म्हणजे आडवी आणि जमिनीला लंब म्हणजे उभी अशा दोनच दिशा वापराव्या लागतात. पृथ्वी प्रत्येक वस्तूला आपल्या केंद्राकडे त्रिज्येच्या दिशेने आकर्षित करते. पृथ्वीच्या पृष्ठभागावरील कोणत्याही बिंदूशी तिला स्पर्श करणारे प्रतल त्या बिंदूतून जाणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते. या प्रतलाला क्षितिज समांतर (Horizontal) म्हणजेच आडवे म्हणतात. तर त्रिज्येच्या दिशेला ऊर्ध्व (Vertical) म्हणजे उभी असे म्हणतात (आकृती 34). जमीन बरोबर क्षितिज समांतर नसेल तर तिच्यावर ठेवलेली वस्तू अस्थिर रहाते. अशा ठिकाणी चेंडू ठेवला तर तो उतारावर घरंगळत जातो, पाणी ओतले तर ते वाहू लागते. एखाद्या इमारतीचे खांब आणि भिंती बरोबर उभ्या बांधल्या नाहीत तर ती इमारत अस्थिर होते. म्हणजेच निसर्गानेच आपल्याला उभ्या आडव्या दिशा वापरण्यास भाग पाडले आहे.



आकृती 35

आयत किंवा काटकोन चौकोन हा आकार करण्यास आणि वापरण्यासही सर्वात सोपा आहे. अवकाश भरून काढण्यासाठी आयताकार अतिशय सोयीचा असतो. सुताराचा गुण्या आयताचे किंवा चौरसाचे काटकोन करण्यासाठी फार उपयोगी असतो. कोणत्याही रेषेवर एखाद्या बिंदूशी काटकोन करावयास आणि समांतर रेषा काढण्यासही गुण्या उपयोगी पडतो (आकृती 35).

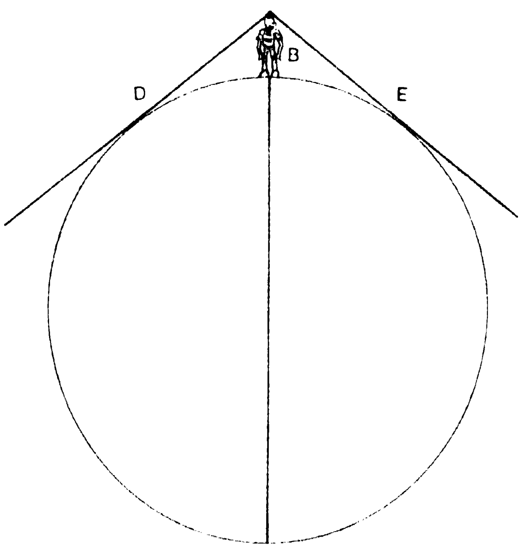


आकृती 36

सुतार कपाटाच्या फळ्या बसवितो

तेव्हा फळ्यांमधील AC आणि BD ही दोन्ही बाजूंची अंतरे सारखीच ठेवतो. त्यामुळे AB आणि CD या फळ्या बरोबर समांतर रहातात. कपाटाच्या फळ्या नेमक्या समांतर आणि आडव्या असाव्या लागतात, म्हणजे फळीवर ठेवलेल्या वस्तू समतोल रहातात (आकृती 36). स्पिरिट लेव्हल आणि ओळंबा यांनी गवंडीही नेमकी आडवी आणि उभी दिशा साधत असतो. कोणत्याही द्रवाचा पृष्ठभाग नेहमी क्षितिजसमांतर रहातो. म्हणूनच स्पिरिटलेव्हल मधील बुडबुडा एखादा पृष्ठभाग क्षितिजसमांतर आहे की नाही हे दाखवितो, तर ओळंबा बरोबर उभी दिशा दाखवितो.

क्षेत्रफळ आणि घनफळ किंवा आकारमान मोजणे ही सुद्धा नेहमी करावी लागणारी क्रिया आहे. त्यासाठी भूमितीची विविध सूत्रे उपयोगी पडतात. सुतार, गवंडी, रंगारी तसेच दगड फोडणारे किंवा माती खणणारे मजूर त्यांच्या कामाचे क्षेत्रफळ किंवा घनफळ किती होते हे मोजतात.



आकृती 37

भूमितीच्या साह्याने आपल्याला सुचलेले इतर प्रश्नही सोडविता येतात. समजा एखादा मनुष्य 2 मीटर उंच आहे. तो जमिनीवर उभा राहून किती दूरचे पाहू शकतो ?

आकृती 37 पहा. ही प्रमाणशीर आकृती नाही. तरीही ती आपल्या कामाला पुरेशी आहे. AB ही त्या माणसाची उंची आहे. म्हणजे AB = 2 मी. BC हा पृथ्वीचा व्यास आहे. म्हणून BC = $13{,}400 \times 10^3$ मी. D आणि E हे क्षितिजावरील दोन बिंदू आहेत. आता आपल्याला BD किंवा BE हे अंतर काढावयाचे आहे. आता वर्तुळाच्या प्रमेयाप्रमाणे.

$$(AD)^2 = AB \times AC$$

$$(AD)^2 = 2 \times 13400 \times 10^3$$

$$= 268 \times 10^5 \text{ मी.}$$

$$AD = \sqrt{26.8 \times 10^6 \text{मी.}}$$

$$= \sqrt{26.8} \times 10^3 \text{ मी.}$$

$$= 5.176 \times 10^3 \text{ मी.}$$

$$= 5.176 \text{ किमी.}$$

आता D बिंदू इतका दूर आहे की AD आणि BD ही अंतरे जवळ जवळ समानच आहेत. म्हणजेच BD हे अंतर 5.176 किमी. आहे. म्हणजेच दोन मीटर उंच माणसाचे क्षितिज 5.176 किमी. दूर आहे. एवढ्या दूरचे तो पाहू शकतो.

सामान्य माणसाच्या या प्रश्नाला संदेशवहनाच्या कार्यामध्ये फार महत्त्व प्राप्त होते. टी.व्ही. चा मनोरा बांधताना वरील प्रश्नाचे उत्तर उपयोगी पडते. इष्ट अंतरापर्यंत संदेश पोहोचविण्यासाठी किती उंचीचा टी.व्ही. मनोरा बांधावयास हवा ? उलट असा प्रश्नसुद्धा विचारता येईल की 200 मीटर उंचीच्या टी.व्ही. मनोऱ्याचे क्षितिज किती दूर असेल ? वर दिलेल्या प्रश्नाच्या उत्तरावरून हे अंतर 5.176×10^4 मी. म्हणजेच 51.76 किमी. येते. म्हणजेच या मनोऱ्यावरून प्रक्षेपित केलेले कार्यक्रम सुमारे 52 किमी. अंतरापर्यंत दिसू शकतील.

6

त्रिकोणमिती

भूमितीच्या अभ्यासातून निर्माण झालेली त्रिकोणमिती ही गणिताची एक महत्त्वाची शाखा आहे. त्रिकोणमिती या शब्दाचा अर्थ त्रिकोणाचे मापन असा आहे. जर त्रिकोणाचे काही घटक म्हणजे बाजू आणि कोन माहीत असतील तर त्रिकोणमितीने त्याच्या उरलेल्या घटकांची माहिती मिळविता येते. याचा उपयोग करून विविध प्रकारचे प्रश्न सोडविता येतात.

पुढील प्रश्न पहा

◇ एका बागेत नारळाचे सुंदर झाड आहे. ते खूप उंच आहे. प्रत्येक जण त्याच्या उंचीविषयी आश्चर्य व्यक्त करतो आणि झाड किती उंच असेल असा विचार करतो. झाडावर न चढता त्या नारळाची उंची काढता येईल का ?

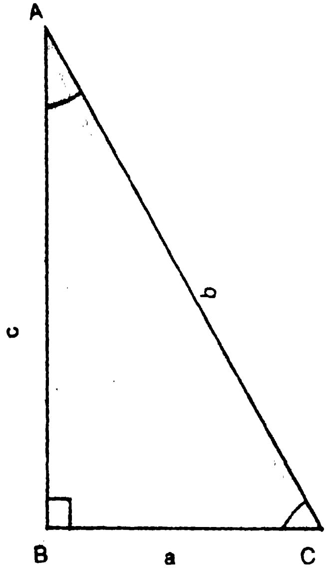
◇ नदीच्या काठावर एक माणूस आहे. नदी न ओलांडता तिचे पात्र किती रुंद आहे हे त्याला काढावयाचे आहे.

◇ एका दुर्गम जागी एक सर्वेक्षक जमिनीचे सर्वेक्षण करीत आहे. तो जेथे उभा आहे तेथून दूर दिसणाऱ्या एका झाडाचे अंतर त्याला काढावयाचे आहे. झाडाजवळ जाणे शक्य नसले तर ते अंतर कसे काढावे ?

वर दिल्यासारखे प्रसंग वारंवार उद्भवतात, आणि त्रिकोणाच्या गुणधर्मावरून असे प्रश्न सहज सोडविता येतात. त्रिकोणमिती ही त्रिकोणाचा खास अभ्यास करणारी गणिताची शाखा आहे. या शाखेमध्ये त्रिकोणाच्या बाजू आणि कोन यांच्या संबंधांचा अभ्यास केला जातो. त्रिकोणमितीने वरील प्रश्न कसे सोडवतात हे आपण पाहू.

ABC हा काटकोन त्रिकोण पहा (आकृती 38). $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ आणि $\angle C = 60^\circ$ घेऊ. a,b आणि c या बाजू आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे घेऊ. आता त्रिकोणाच्या गुणधर्मानुसार $a = \frac{b}{2}$. पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार $c^2 = b^2 -$

a^2. म्हणून $c^2 = b^2 - \frac{3}{4}b^2$ म्हणजेच $c = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ म्हणजे ABC त्रिकोणाच्या तीन बाजू $b, \frac{b}{2}$ आणि $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ अशा आहेत. या बाजूंची गुणोत्तरे घेतली तर ती अशी येतात.

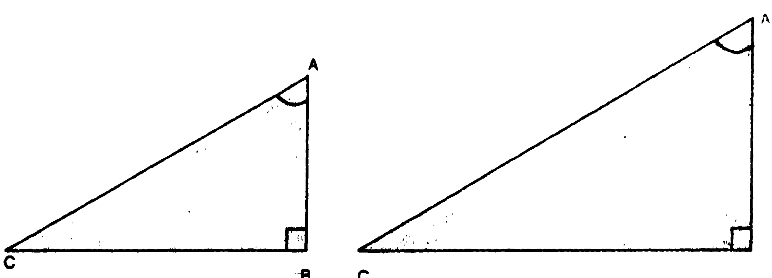


आकृती 38

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ आणि $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$.

या सर्व गुणोत्तरांच्या किंमती निश्चित आहेत. दिलेल्या कोनाच्या संदर्भात या गुणोत्तरांना विशिष्ट नावे दिली जातात. जर C हा कोन घेतला तर $\frac{a}{b}$ या गुणोत्तराला कोसाइन C, $\frac{c}{b}$ याला साइन C आणि $\frac{c}{a}$ याला टॅंजंट C अशी नावे आहेत. सोयासाठी ही गुणोत्तरे अनुक्रमे cos C, sin C आणि tan C अशी लिहितात.. म्हणूनच वरील आकृतीवरून $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ व $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

यात सर्वात महत्त्वाची गोष्ट ही की त्रिकोण कोणताही असला तरी दिलेल्या मापाच्या कोनाच्या गुणोत्तरांच्या किमती कायम रहातात. त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लांबीवर या किंमती अवलंबून नसतात. आकृती 39 पहा. या आकृतीमधील दोन



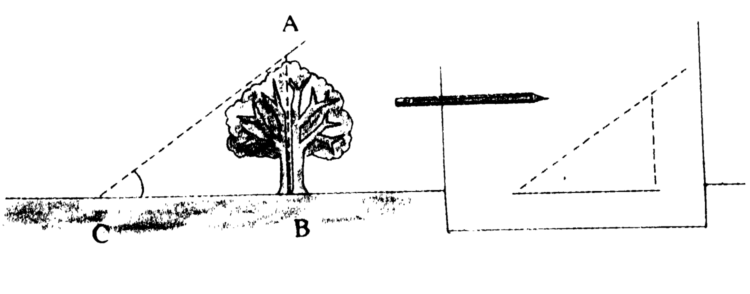
आकृती 39

त्रिकोणात बाजू लहानमोठ्या आहेत. परंतु $\angle A = 60^\circ$ आहे. म्हणून दोन्ही त्रिकोणात $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ हीच किंमत मिळते. 0° पासून 90° पर्यंतच्या सर्व कोनांसाठी वरील गुणोत्तरांच्या किंमती काढलेल्या असतात आणि त्यांची कोष्टके तयार केलेली असतात. त्यांना त्रिकोणमितीय कोष्टके (Trigonometric tables) म्हणतात. या कोष्टकांवरून कोणत्याही कोनाच्या cos, sin आणि tan गुणोत्तरांच्या किंमती काढता येतात. वरील उदाहरणात $\cos 60^\circ = 0.5000$, $\sin 60^\circ = 0.8660$, $\tan 60^\circ = 1.7321$ या किंमती कोष्टकांवरून मिळतात.

अचूक त्रिकोणमितीय कोष्टके बनविण्याच्या कामात प्राचीन काळाचे अनेक गणिती गढले होते. निकाइ येथील ग्रीक गणिती हिपार्कस (इ.स.पू. 150) याला सर्वप्रथम ही कोष्टके बनविण्याचे श्रेय दिले जाते. त्याने सूर्य आणि चंद्र यांचे दृश्यमान व्यास आणि पृथ्वीपासूनचे अंतर मोजण्याचा प्रयत्न केला. पृथ्वीवरून मापे घेऊन अंतराळातील वस्तूंचे मापन ज्या गणिताने करता येईल असे गणित निर्माण करण्याचा त्याने प्रयत्न केला. त्यातूनच त्रिकोणमितीचा उगम झाला.

आपले विविध प्रश्न सोडविण्यासाठी त्रिकोणमितीचा कसा उपयोग होतो ? दिलेल्या आकृतीचे अनेक त्रिकोण पाडले आणि त्यांचे कोन व बाजू मोजल्या तर त्रिकोणमितीची कोष्टके वापरून अनेक प्रश्न सोडविता येतात. सुरुवातीस दिलेले प्रश्न सोडवून पाहू.

पहिल्या प्रश्नाची आकृती दाखविली आहे (आकृती 40). आकृतीमध्ये AB रेषेने झाड दाखविले आहे. BC ही रेषा जमिनीवर असून $\angle ABC = 90^\circ$. BC = 10 मीटर घेऊ. C बिंदूपाशी असलेल्या निरीक्षकाने झाडाच्या शेंड्याकडे पाहिले असता त्याच्या नजरेचा जमिनीशी 60° चा कोन होतो. आकृतीवरून



आकृती 40

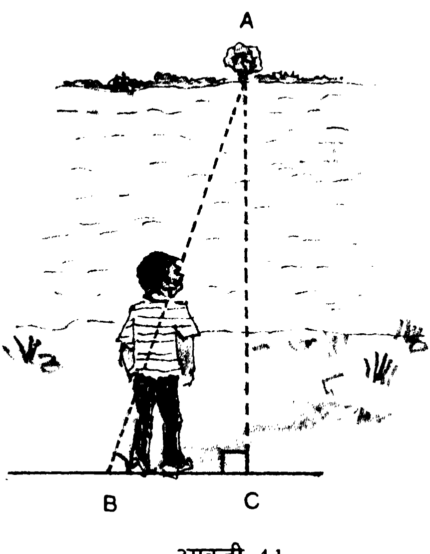
$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$
$$\frac{AB}{10} = 1.7321$$
$$AB = 1.7321 \times 10 = 17.321 \text{ मी.}$$

म्हणजे झाडाची उंची 17.321 मीटर आहे. त्रिकोणमितीचा उपयोग केल्यामुळे BC हे अंतर आणि C हा कोन ही फक्त दोन सोपी मापे घेऊन हा प्रश्न सोडविता आला.

दुसऱ्या प्रश्नामध्ये नदीच्या काठावरील निरीक्षक B येथे उभा आहे असे मानू. (आकृती 41). तो दुसऱ्या काठावरील एक बिंदू A म्हणजे एखादे झाड घेऊन त्याचा BC रेषेशी आलेला कोन ABC मोजतो. त्याचे माप 72° आहे. नंतर निरीक्षक B पासून C पर्यंत 30 मीटर चालून बरोबर A या झाडाच्या समोर येतो. या ठिकाणी $\angle ACB = 90^\circ$ आहे. त्रिकोण ABC वरून

$$\frac{AC}{BC} = \tan 72^\circ$$
$$\frac{AC}{30} = \tan 72^\circ$$
$$AC = 30 \times 3.077 = 92.31 \text{ मी.}$$

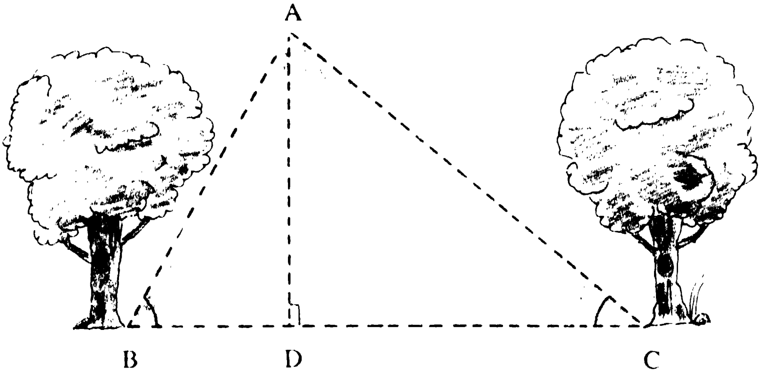
म्हणजेच नदीच्या पात्राची रुंदी 92.31 मीटर आहे.



आकृती 41

तिसऱ्या प्रश्नामध्ये सर्वेक्षकाने B आणि C या दोन ठिकाणांमधील अंतर मोजले आहे. असे मानू. ही दोन ठिकाणे दोन झाडांनी आकृतीमध्ये दाखविली आहेत. (आकृती 42). त्याला A पासूनची AB, AC आणि AD ही अंतरे मोजावयाची आहेत. A या ठिकाणी जाणे अशक्य असल्यामुळे ही अंतरे सरळ मोजणे अशक्य आहे. परंतु $\angle ABC$ आणि $\angle ACB$ हे कोन मोजणे मात्र शक्य आहे.

BC हे अंतर 100 मीटर आहे असे मानू. तसेच $\angle ABC = 60^\circ$ आणि $\angle ACB = 50^\circ$ आहेत. त्रिकोणमितीच्या सूत्रांवरून



आकृती 42

$$AD = \frac{100\ (\tan 60^\circ \times \tan 50^\circ)}{\tan 60^\circ + \tan 50^\circ}$$

हे सूत्र मिळते. त्यात किंमती घातल्या तर

$$AD = \frac{100 \times 1.7321 \times 1.1918}{1.7321 + 1.1918}$$

$= 120.372$ मीटर हे येते.

आता AB आणि AC ही अंतरे खालील सूत्रांवरून काढता येतील.

$$AB = \frac{AD}{\sin 60^\circ}$$

$$AC = \frac{AD}{\sin 50^\circ}$$

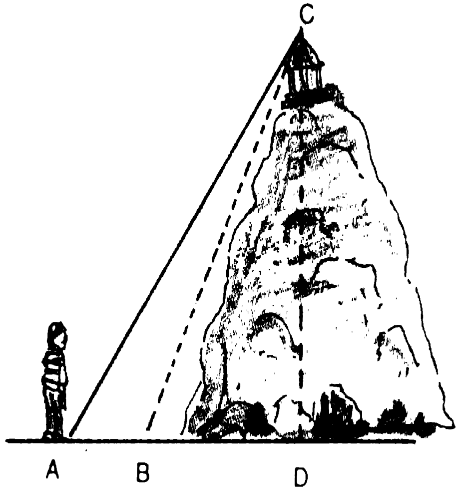
$$AB = \frac{120.372}{0.8660} = 139.00 \text{ मी.}$$

$$AC = \frac{120.372}{0.7660} = 157.14 \text{ मी.}$$

अशा प्रकारचे इतरही अनेक प्रश्न त्रिकोणमितीने सोडविता येतात. उदाहरणार्थ दूरवरच्या इमारतीची किंवा मनोऱ्याची किंवा कड्याची उंची त्याच्याजवळ न जाताही काढता येते. असे उदाहरण आकृती 43 मध्ये दाखविले आहे.

C हे एका खाडीच्या पलीकडे असलेल्या कड्यावरील इमारतीचे टोक आहे. A या ठिकाणी असलेल्या निरीक्षकाने $\angle CAB$ मोजला. त्याचे माप 55° आहे. नंतर

निरीक्षक A पासून B पर्यंत 100 मीटर चालून गेला. B पाशी त्याने $\angle CBD$



आकृती 43

मोजला. त्याचे माप 65° होते. आता पुढील सूत्रांवरून h = CD ही कड्याची उंची मिळाली.

$$\frac{h}{BD} = \tan 65^\circ. \quad \frac{h}{100 + BD} = \tan 55^\circ$$

$$h = \frac{100 \times \tan 55^\circ}{\tan 65^\circ - \tan 55^\circ} \times \tan 65^\circ$$

$$= \frac{100 \times 1.4281 \times 2.1445}{2.1445 - 1.4281}$$

= 427.5 मी

म्हणजेच कड्याच्या सर्वात वरच्या टोकाची उंची 427.5 मी आहे. दुरून मापन करून जगातील सर्वात उंच माऊंट एव्हरेस्ट या शिखराची उंची गणिताने काढण्यात आली हे त्रिकोणमितीच्या उपयोगाचे सर्वोत्कृष्ट उदाहरण होय.

संदर्भ

1. ग्रॅहम फ्लॅग : *नंबर्स*, पेंग्विन बुक्स.
2. लॅन्सेलॉट हॉगबेन : *मॅथेमॅटिक्स फॉर द् मिलियन्स.*
3. मॉरिस क्लाइन : *मॅथॅमॅटिकल थॉट*, खंड 1, ऑक्सफर्ड युनिव्हर्सिटी प्रेस.
4. जेम्स आर. न्यूमन : *द् वर्ल्ड ऑफ मॅथॅमॅटिक्स*, खंड 2, टेंपस बुक्स.
5. दि सायंटिफिक अमेरिकन प्रकाशन : *मॅथॅमॅटिक्स इन द् मॉडर्न वर्ल्ड.*
6. एन्. दत्ता आणि सिंग : *हिस्ट्री ऑफ हिंदू मॅथॅमॅटिक्स.*
7. ना.ह. फडके : *लीलावती पुनर्दर्शन.*
8. र.पु. कुळकर्णी : *चार शुल्बसूत्रे* – साहित्य संस्कृती मंडळ, मुंबई.

Printed at Shivam Offset Press, A-12/1 Naraina Indl. Area, Phase-I, New Delhi-110 028